Приклади розв'язання контрольних задач

Варіант 1

1. Які властивості має стаціонарний процес? (3 бали)
2. При якій умові $MA(1)$-процес є стаціонарним? При якій умові він може бути перетворений? (7 балів)
3. При якому припущенні $AR(1)$-процес можна представити як збіжний MA процес. Обчислить для цього випадку математичне сподівання, дисперсію, автоковаріацію y_t. (7 балів)
4. Чи є $AR(2)$-процес виду $y_t = y_{t-1} + 0.75y_{t-2} + \varepsilon_t$, де ε_t – "білий шум", стаціонарним? (3 бали)
5. Нехай $\{Y_T\}$ – деякий AR-процес. Як визначити оптимальним чином його порядок p? (5 балів)

Розв'язок

1. Стаціонарний процес повинен мати постійні та скінченні математичні сподівання, дисперсію, коваріацію всіх порядків.

2. Знайдемо числові характеристики процесу:

$$Ey_t = \mu \quad , \quad \forall \quad t,$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{var}(y_t) &= E(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})^2 = E\left(\varepsilon_t^2 + 2\theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} + \theta^2\varepsilon_{t-1}^2\right) = \\ &= \sigma^2 + 0 + \theta^2\sigma^2 = \sigma^2\left(1+\theta^2\right)\end{aligned}\right. , \quad \forall \quad t,$$

$$\operatorname{cov}(y_t, \ y_{t-j}) = E\left((\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-j} + \theta\varepsilon_{t-j-1})\right) =$$

$$= E\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-j} + \theta\varepsilon_t\varepsilon_{t-j-1} + \theta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-j} + \theta^2\theta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-j-1}\right)$$

Для $j = 1$: $\gamma_1 = \theta\sigma^2$, $j = 2, \ 3, \ \ldots$: $\gamma_j = 0$ для $\forall \quad t$.

Таким чином $MA(1)$–процес є стаціонарним, оскільки він має скінченні математичне сподівання, дисперсію, та коваріацію.

Дослідимо, при якій умові процес є перетворювальним.

$$\varepsilon_t = y_t - \mu - \theta\varepsilon_{t-1} = y_t - \mu - \theta\left(y_{t-1} - \mu - \theta\varepsilon_{t-2}\right) =$$

$$= y_t - \theta y_{t-1} - \mu + \theta\mu + \theta^2\varepsilon_{t-2} = \ldots$$

$$\varepsilon_t = y_t - \mu - \sum_{i=1}^{\infty}\theta^i\left(y_{t-i} - \mu\right).$$

Оскільки процес ε_t є "білим шумом", то $\lim\limits_{i\to\infty}\theta^i\varepsilon_{t-1} = 0$, що можливо лише при $|\theta| < 1$. Таким чином, $MA(1)$–процес можна перетворити у $AR(\infty)$–процес за умови $|\theta| < 1$.

3. Представимо $AR(1)$–процес у вигляді $MA(\infty)$-процесу:

$$y_t = c + \varphi y_{t-1} + \varepsilon_t = c + \varphi\left(c + \varphi y_{t-2} + \varepsilon_{t-1}\right) + \varepsilon_t = \ldots =$$

$$= c\sum_{i=0}^{\infty}\varphi^i + \sum_{i=0}^{\infty}\varphi^i\varepsilon_{t-i} = \frac{c}{1-\varphi} + \sum_{i=0}^{\infty}\varphi^i\varepsilon_{t-i}$$

Очевидно, що цей процес буде збіжним, якщо $|\varphi| < 1$.

Знайдемо числові характеристики цього процесу:

$$E\left(y_t\right) = \frac{c}{1-\varphi},$$

$$\operatorname{var}\left(y_t\right) = E\left(y_t - \frac{c}{1-\varphi}\right)^2 = E\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varphi^i\varepsilon_{t-i}\right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\varphi^i\right)^2 E\left(\varepsilon_{t-i}\right)^2 = \frac{1}{1-\varphi^2}\sigma^2.$$

$$\operatorname{cov}\left(y_t,\ y_{t-j}\right) = E\left(\left(y_t - Ey_t\right)\left(y_{t-j} - Ey_{t-j}\right)\right) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varphi^i\varepsilon_{t-i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\varphi^{i+j}\varepsilon_{t-i-j}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\varphi^{i+j}\cdot\varphi^i E\left(\varepsilon_{t-i},\ \varepsilon_{t-i-j}\right) = \sigma^2\sum_{i=0}^{\infty}\varphi^{i^2}\varphi^j = \sigma^2\,\frac{\varphi^j}{1-\varphi^2}.$$

4. $y_t = y_{t-1} + 0.75y_{t-2} + \varepsilon_t, \left(1 - B - 0.75B^2\right)y_t = \varepsilon_t$. Нам треба з'ясувати, чи є у рівняння $1 - z - 0.75z^2 = 0$ хоча б один корінь, за абсолютною величиною менший за одиницю.

$z_1 = -2 < -1, z_2 = \frac{2}{3} < 1$. Таким чином, оскільки не всі корені за абсолютною величиною більші за одиницю, то процес не є стаціонарним.

5. Порядок $AR(p)$-процесу визначається при аналізі часткової функції автокореляції. Якщо графік цієї функції затухає після p коливань, то найбільш імовірно, що аналізується $AR(p)$–процес. При цьому не можна забувати, що якщо на графіку функції автокореляції є спад, то процес можна ідентифікувати як деякий $MA(q)$ або $ARMA(p,\ q)$-процес. На стадії діагностики, можна також перевірити, чи не є більш адекватною модель $AR(p-1)$ або $AR(p+1)$. Після порівняння числових критеріїв, обирається оптимальне значення p^*.

Варіант 2

1. Обчислити математичне сподівання процесу випадкового блукання без тренду. (2 бали)
2. Як виглядає для перетворюваного $MA(2)$-процесу оптимальна формула прогнозу для $y_{t+\tau}$, якщо прогноз робиться у період t на основі відомих ε_{t-j}, $j \geq 0$? Обчислити формулу для помилки прогнозування, а також середню квадратичну похибку для $\tau > 0$. (7 балів)
3. Припустимо, що всі ε_t – невідомі. Як на основі відомих y_t зробити прогноз на період $\tau = T + 1$? (6 балів)

4. Як треба робити прогноз $y_{t+\tau}$, коли $\{y_t\}$ є деяким $AR(2)$-процесом? (5 балів)
5. Нехай $\{y_t\}$ має чіткий трендовий компонент. Як провести тест гіпотези про те, що $\{y_t\}$ – "випадкове блукання"? (5 балів)

Розв'язок

1.Для процесу випадкового блукання без тренду $y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ необхідно знайти математичне сподівання, дисперсію і коваріацію.

$$\mu = Ey_t = E\left(\beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \varepsilon_t\right) = \beta_0 + \beta_1 Ey_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 Ey_t = \beta_0 + \beta_1 \mu,$$

тобто

$$\mu = \frac{\beta_0}{1-\beta_1}.$$

2. Для $MA(2)$-процесу $y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$ прогноз має вигляд

$$\hat{y}_{t+\tau|t} = \begin{cases} \mu + \theta_1 \varepsilon_t + \theta_2 \varepsilon_{t-1}, & \tau = 1, \\ \mu + \theta_1 \varepsilon_t, & \tau = 2, \\ \mu, & \tau > 2. \end{cases}$$

Прогнозна помилка становить

$$y_{t+\tau} - \hat{y}_{t+\tau} = \begin{cases} \varepsilon_{t+1}, & \tau = 1, \\ \varepsilon_{t+2} + \theta_1 \varepsilon_{t+1}, & \tau = 2, \\ \varepsilon_{t+\tau} + \theta_1 \varepsilon_{t+\tau-1}, & \tau > 2. \end{cases}$$

Тоді середньоквадратична похибка

$$MSE = E\left(y_{t+\tau} - \hat{y}_{t+\tau}\right)^2 = \begin{cases} \sigma^2, & \tau = 1, \\ \sigma^2\left(1 + \theta_1^2\right), & \tau = 2, \\ \sigma^2\left(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2\right), & \tau > 2. \end{cases}$$

3. Оскільки всі ε_t – невідомі, потрібно їх оцінити:

$$\hat{\varepsilon}_t = y_t - \mu - \theta_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} - \theta_2 \hat{\varepsilon}_{t-2},$$

де $\hat{\varepsilon}_0 = \hat{\varepsilon}_{-1} = 0$.

Тоді прогноз на один період становитиме:

$$\hat{y}_{t+1|t} = \mu + \theta_1 \hat{\varepsilon}_t + \theta_2 \hat{\varepsilon}_{t-1}.$$

4. Для прогнозування $AR(2)$ процесу необхідно використати закон ітеративних сподівань:

$$\hat{y}_{t+\tau|t} = \mu + \varphi_1\left(\hat{y}_{t+\tau-1|t} - \mu\right) + \varphi_2\left(\hat{y}_{t+\tau-2|t} - \mu\right).$$

Починаючи від $\tau = 1$, обраховуємо за допомогою відомих y_t та y_{t-1} оцінки прогнозів на наступні періоди.

5. Гіпотеза може бути протестована за допомогою такої моделі:

$$y_t = \mu + \beta t + \rho y_{t-1} + u_t.$$

Тоді

H^0 : $\beta = 0, \rho = 1$.

Для перевірки цієї гіпотези необхідно оцінити початкову модель за методом найменших квадратів, звідки отримуємо t-статистику для коефіцієнта β. Цю t-статистику порівнюємо зі значенням $\hat{\tau}_{\beta_\tau}$ із таблиць Діккея-Фуллера для відповідного числа спостережень T та рівня надійності α. Якщо табличне значення більше практичного, то гіпотеза H^0 приймається, в протилежному випадку відхиляється.