VAR-**моделі**

К.е.н., доц. Ставицький А.В.

www.andriystav.cc.ua

План

1. Опис VAR-моделей
2. Оцінювання стаціонарних VAR-моделей
3. Структурний аналіз VAR-моделей
4. Поняття коінтеграції

1. ОПИС VAR-МОДЕЛЕЙ

Опис моделі – 1

Як і у будь-якій моделі, у VAR-моделях використовується декілька змінних. Ці змінні можуть залежати одна від іншої, а також, від лагових значень всіх змінних. Як правило, такі залежності об’єднуються в одну систему. За її допомогою можна не тільки здійснювати прогнозування змінних, але й аналізувати взаємозалежності між змінними, точно встановлювати їх структуру. Такі системи можуть включати всі необхідні змінні, тому вони є значним узагальненням при аналізі часових рядів.

Опис моделі – 2

Основне питання полягає у визначенні кількості рівнянь у системі, кількості лагів для кожної змінної. При включенні багатьох змінних з великою кількістю лагів систему важко оцінити та аналізувати взаємовплив змінних одна на одну. В той же час мала кількість змінних або лагів може призвести до невірної оцінки моделі. Тому треба обережно обирати параметри моделі.

Опис моделі – 3

Системи, які складаються лише із змінних, які залежать тільки від її лагових значень та інших змінних, отримали назву VAR (vector autoregressive) моделей. Якщо при аналізі моделі використовуються лагові значення деякого процесу з властивостями “білого шуму”, то такі моделі називаються VARMA (vector autoregressive moving average). Крім того, якщо замість значень часового ряду беруться послідовні різниці, то система називається VARIMA (vector autoregressive integrated moving average). Якщо додати до стандартної VARMA-моделі декілька екзогенних змінних, то отримана модель називатиметься VARMAX (vector autoregressive moving average with exogenous variables).

Опис моделі – 4

Нехай досліджується *n* змінних, кожна з яких спостерігалася протягом *T* періодів.

Тоді найпростіша VAR-модель описується системою рівнянь

$$y_{i,t} = c_i + a_{i1}^{(1)} y_{1,t-1} + a_{i2}^{(1)} y_{2,t-1} + \ldots + a_{in}^{(1)} y_{n,t-1} +$$

$$+ a_{i1}^{(2)} y_{1,t-2} + a_{i2}^{(2)} y_{2,t-2} + \ldots + a_{in}^{(2)} y_{n,t-2} + \ldots +$$

$$+ a_{i1}^{(p)} y_{1,t-p} + a_{i2}^{(p)} y_{2,t-p} + \ldots + a_{in}^{(p)} y_{n,t-p} + \varepsilon_{i,t}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Опис моделі – 5

У цій моделі введені такі позначення:

i - номер змінної,

$a_{i,j}^{(k)}$ - коефіцієнти моделі,

ε_i - векторні процеси “білого шуму”.

Опис моделі – 6

$$Y_t = \begin{pmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ \dots \\ y_{n,t} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \dots \\ \varepsilon_{nt} \end{pmatrix}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(j)} & a_{1,2}^{(j)} & \dots & a_{1,n}^{(j)} \\ a_{2,1}^{(j)} & a_{2,2}^{(j)} & \dots & a_{2,n}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}^{(j)} & a_{n,2}^{(j)} & \dots & a_{n,n}^{(j)} \end{pmatrix} \qquad j = 1, \dots, p$$

Опис моделі – 7

Тоді модель приймає вигляд

$$\mathrm{I} \cdot Y_t = C + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \ldots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

де I - одинична матриця розміру $(n+1)\times(n+1)$

Використовуючи поліноміальний запис

$$A(L) = \mathrm{I} - A_1 L - A_2 L^2 - \ldots - A_p L^p$$

отримуємо запис VAR-моделі у матричній формі:

$$A(L) Y_t = C + \varepsilon_t$$

Опис моделі – 8

Для аналізу моделі використовуються такі припущення щодо збурень

$$E\varepsilon_t = \begin{pmatrix} E\varepsilon_{1t} \\ E\varepsilon_{2t} \\ \dots \\ E\varepsilon_{nt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

Опис моделі – 9

$$E\left(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_\tau\right) = \begin{pmatrix} E\varepsilon_{1t}\varepsilon_{1\tau} & E\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2\tau} & \dots & E\varepsilon_{1t}\varepsilon_{n\tau} \\ E\varepsilon_{2t}\varepsilon_{1\tau} & E\varepsilon_{2t}\varepsilon_{2\tau} & \dots & E\varepsilon_{2t}\varepsilon_{n\tau} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E\varepsilon_{nt}\varepsilon_{1\tau} & E\varepsilon_{nt}\varepsilon_{2\tau} & \dots & E\varepsilon_{nt}\varepsilon_{n\tau} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{cov}\left(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{1\tau}\right) & \operatorname{cov}\left(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2\tau}\right) & \dots & \operatorname{cov}\left(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{n\tau}\right) \\ \operatorname{cov}\left(\varepsilon_{2t}, \varepsilon_{1\tau}\right) & \operatorname{cov}\left(\varepsilon_{2t}, \varepsilon_{2\tau}\right) & \dots & \operatorname{cov}\left(\varepsilon_{2t}, \varepsilon_{n\tau}\right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{cov}\left(\varepsilon_{nt}, \varepsilon_{1\tau}\right) & \operatorname{cov}\left(\varepsilon_{nt}, \varepsilon_{2\tau}\right) & \dots & \operatorname{cov}\left(\varepsilon_{nt}, \varepsilon_{n\tau}\right) \end{pmatrix} = \begin{cases} \Lambda, \ t = \tau, \\ 0, \ t \neq \tau. \end{cases}$$

Опис моделі – 10

Матриця Λ називається дисперсійно-коваріаційною матрицею і вона має вигляд:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \operatorname{var}(\varepsilon_{1t}) & \operatorname{cov}(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}) & \dots & \operatorname{cov}(\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{nt}) \\ \operatorname{cov}(\varepsilon_{2t}, \varepsilon_{1t}) & \operatorname{var}(\varepsilon_{2t}) & \dots & \operatorname{cov}(\varepsilon_{2t}, \varepsilon_{nt}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \operatorname{cov}(\varepsilon_{nt}, \varepsilon_{1t}) & \operatorname{cov}(\varepsilon_{nt}, \varepsilon_{2t}) & \dots & \operatorname{var}(\varepsilon_{nt}) \end{pmatrix}$$

Стаціонарність VAR-моделі

VAR-модель є стаціонарною, коли всі корені рівняння

$$\det\left(\mathrm{I} - A_1 z - A_2 z^2 - \ldots - A_p z^p\right) = 0$$

за абсолютною величиною є більшими за одиницю.

Перетворення VAR-моделей

VAR(p)-процес можна перетворити у нескінченний VMA-процес.

2. Оцінювання VAR-моделей

Оцінювання моделі - 1

Для деякого VAR(p)-процесу виду

$$\mathrm{I} \cdot Y_t = C + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \ldots + A_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

введемо позначення

$$\Pi = \left\lfloor C \vdots A_1 \vdots A_2 \vdots \ldots \vdots A_p \right\rfloor$$

матриця розміру n*(np+1) коефіцієнтів моделі

Оцінювання моделі - 2

$$X_t = \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \\ \dots \\ Y_{t-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y_{1,t-1} & y_{2,t-1} & \dots & y_{n,t-1} & y_{1,t-1} & y_{2,t-2} & \dots & y_{n,t-2} & \dots & y_{n,t-p} \end{pmatrix}'$$

- вектор розміру (np+1)*1 екзогенних змінних

Тоді наша модель записується у виді:

$$Y_t = \Pi X_t + \varepsilon_t$$

Оцінювання моделі - 3

Очевидно, що оцінити таку модель неважко за допомогою методу найменших квадратів. Оскільки існує n рівнянь, то необхідно застосувати цей метод n разів.

3. СТРУКТУРНИЙ АНАЛІЗ НА ОСНОВІ VAR-МОДЕЛЕЙ

Види VAR моделей

- VAR моделі у приведеній формі
- Рекурсивні VAR моделі
- Структурні VAR моделі
- VECM (веторні моделі з корекцією похибок) і SVECM (структурні VECM) для інтегрованих рядів

Види VAR: приведена форма

- Звичайне представлення VAR моделі має вигляд:

$$y_t = B(L)y_{t-1} + C(L)x_t + \varepsilon_t$$

- У VAR модель входять тільки лагові значення вектору у, вектор похибок є серійно не корельованим.

- Не існує одночасних ефектів між змінними

Види VAR: структурна форма

- Стуктурна VAR модель використовує економічну теорію для визначення одночасних зв’язків між змінними. Вона має наступне представлення:

$$Ay_t = B(L)y_{t-1} + C(L)x_t + \varepsilon_t$$

- Матриця A визначає одночасні зв’язки між змінними. Не повинно існувати одночасних ефектів між змінними

Види VAR: рекурсивна

- Рекурсивна VAR модель є підвидом структурної VAR. У рекурсивній VAR похибка для кожної змінної є некоррельованою з похибкої для попередньої змінної. Наприклад, нехай y є вектором 3 змінних y={z,h,k}. Рекурсивна VAR модель може бути отримана через накладання наступної структури:
  - Одночасні значення h і k не входять у рівняння z (тільки лаги z, h і k)
  - Тільки одночасні значення z входять у рівняння h (а також лаги z, h і k)
  - Одночасні значення z і h не входять у рівняння k (а також лаги z, h і k)

Проблеми з використанням VAR – 1

- Ідентифікація є досить складним питанням
  - різні ідентифікаційні схеми ("структура") можуть надавати дуже різні результати
  - також значна різниця може бути при використанні різної кількості лагів
- VAR моделі мають тенденцію бути переоціненими:
  - забагато змінних
  - забагато лагів

Проблеми з використанням VAR – 2

- Чи мають бути змінні у VAR моделі стаціонарними?
- Нестаціонарні змінні можуть призводити до хибної регресії і некоректної інтерпретації
- Диференціювання або позбавлення від тренду призводить до втрати інформації

Вибір кількості лагів

- Скільки лагів потрібно включати в модель? Чим більше лагів, тим вище вірогідність моделі, але менше ступенів свободи і вище ймовірність надмірної вірогідності

- Два шляхи до вибору кількості лагів:
  - економічна теорія може запропонувати відповідну кількість лагів
  - використання критеріїв вибору кількості лагів: вибір між економією і вірогідністю

- Інтерпретація результатів:
  - наскільки їм можна довіряти?
  - частота даних

Проблема ідентифікації

$$y_t = D(L) y_{t-1} + e_t$$ - приведена форма

$$A y_t = B(L) y_{t-1} + C\varepsilon_t$$ - структурна форма

Можна перейти від структурної форми до приведеної, але не навпаки:

$$D(L) = A^{-1} B(L) \qquad e_t = A^{-1} C \varepsilon_t$$

Таким чином, існує необмежена кількість шляхів переходу від приведеної форми до неспостережної структурної моделі. Отже, необхідно зробити відомим невідоме: треба надати значення як мінімум одному коефіцієнту, а також накласти ідентифікаційні обмеження.

Ідентифікаційні обмеження

- Рекурсивні (декомпозиція за Холецьким)
- Обмеження на коефіцієнти (напр., $\alpha_{12}=1$)
- Обмеження на дисперсію (напр., $var(e_1)=1$)
- Симетричні обмеження (напр., $\alpha_{12}=\alpha_{21}$)
- Довгострокові обмеження (напр., номінальні шоки не впливають на реальні змінні)
- Обмеження на знак
- Середньострокові обмеження

Декомпозиція за Холецьким – 1

- Ідентифікаційні обмеження накладаються на матрицю А (припускається її трикутниковий вигляд, тобто всі елементи вище головної діагоналі дорівнюють 0).
- Основна увага приділяється вибору порядку змінних (тобто порядку впливу шоків).
- Є найбільш поширеною формою ідентифікації.

Декомпозиція за Холецьким – 2

Структурна форма: $$Ay_t = B(L)y_{t-1} + C\varepsilon_t$$

Обмеження на матриці:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn-1} & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Декомпозиція за Холецьким – 3

Приведена форма: $y_t = A^{-1}B(L)y_{t-1} + A^{-1}C\varepsilon_t = D(L)y_{t-1} + e_t$

де $Var(e_t) = A^{-1}BB'(A^{-1})' = \Omega$

Розкладаємо за допомогою декомпозиції за Холецьким, що за сутністю є квадратним коренем матриці:

$$\Omega = (GE)(E'G')$$

де E – діагональна матриця структурних похибок ε_t, G – нижня трикутна матриця з одиницями по діагоналі

Таким чином: $G = A^{-1}$

Довгострокові обмеження Бланшарда-Кваха – 1

Інший шлях до ідентифікації VAR моделей – це врахування взаємодії змінних у довгостроковому періоді

Бланшард і Квах запропонували схему, в якій:

- шоки пропозиції мають перманентні ефекти на реальні змінні
- шоки попиту мають тільки тимчасові ефекти на реальні змінні

Довгострокові обмеження Бланшарда-Кваха – 2

Бланшард і Квах використали дані з ВВП і безробіття:

$$z_t = A(L)z_{t-1} + B\varepsilon_t \qquad z_t = \begin{bmatrix} \Delta y_t \\ u_t \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_t^y \\ \varepsilon_t^u \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_\varepsilon = \begin{bmatrix} \operatorname{var}(\varepsilon_t^y) & \operatorname{cov}(\varepsilon_t^y, \varepsilon_t^u) \\ \operatorname{cov}(\varepsilon_t^y, \varepsilon_t^u) & \operatorname{var}(\varepsilon_t^u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

VMA представлення: $z_t = (1 - A(L))^{-1} B\varepsilon_t$

Довгострокові обмеження Бланшарда-Кваха – 3

- Оцінюємо VAR у VMA представленні:

$$z_t = D(L)e_t$$

- Накладаємо обмеження на *D(L)*, щоб отримати матриці *A(L)* і *B*:

$$(I - A(L))^{-1} B = C(L) \qquad\qquad z_t = C(L)\varepsilon_t$$

$$C(L) = \begin{bmatrix} C_{11}(L) & C_{12}(L) \\ C_{21}(L) & C_{22}(L) \end{bmatrix}$$

Довгострокові обмеження Бланшарда-Кваха – 4

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(L) & C_{12}(L) \\ C_{21}(L) & C_{22}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_t^y \\ \varepsilon_t^u \end{bmatrix}$$

Припускаємо, що шоки ВВП є шоками попиту, а шоки безробіття є шоками пропозиції, тобто припускаємо, що шоки ВВП не мають перманентного ефекту на ВВП

$$C_{11}(L)\varepsilon_t^y = \sum_i c_{11} L^i \varepsilon_i^y = 0$$

За допомогою цього припущення можна ідентифікувати шоки попиту і пропозиції з VAR моделі у приведеній формі

Загальні принципи ідентифікації

- Визначення цілі VAR моделі (наприклад, якщо VAR модель використовується лише для прогнозування, то ідентифікація взагалі не потрібна).
- Використання економічної теорії для встановлення порядку змінних чи накладення обмежень
- Тестування стійкості
- Аналіз функцій відгуку на імпульси

Функції відгуку на імпульс

Можливо, функції відгуку на імпульс є найбільш корисним результатом VAR моделей для аналізу властивостей даних. Після ідентифікації VAR моделі можна застосовувати функції відгуку на імпульс для дослдіження взаємовпливу змінних.

Використання представлення VAR моделей у формі ковзного середнього показує динамічну відповідь змінних на фундаментальні шоки.

Функції відгуку на імпульс часто використовуються для ідентифікації потужності і тривалості впливів.

Імпульсний аналіз - 1

Розглянемо стандартну VMA-модель:

$$Y_t = \mathrm{M} + H_0\varepsilon_t + H_1\varepsilon_{t-1} + H_2\varepsilon_{t-2} + \ldots$$

H_0 - одинична матриця.

Матриця коефіцієнтів має вигляд

$$B_\tau = \begin{pmatrix} b_{11}^{(\tau)} & b_{12}^{(\tau)} & \ldots & b_{1n}^{(\tau)} \\ b_{21}^{(\tau)} & b_{22}^{(\tau)} & \ldots & b_{2n}^{(\tau)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}^{(\tau)} & b_{n2}^{(\tau)} & \ldots & b_{nn}^{(\tau)} \end{pmatrix}$$

Імпульсний аналіз - 2

Елемент цієї матриці показує, як зміниться значення y_i в залежності від j-го шоку τ періодів назад. Таким чином

$$b_{ij}^{(\tau)} = \frac{\partial y_{i,t+\tau}}{\partial \varepsilon_{j,t}} = \frac{\partial y_{i,t}}{\partial \varepsilon_{j,t-\tau}}$$

Цей вираз як функція від τ називається **імпульсно-відповідною функцією**. За її допомогою можна досліджувати, який вплив на майбутні значення мають відповідні шоки в минулому.

4. ПОНЯТТЯ КОІНТЕГРАЦІЇ

Визначення коінтеграції

Припускаємо 2 змінні з порядком інтеграції d (I(d)) і рівняння між ними:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$$

Якщо β є таким вектором, що εt є I(d-b), тоді y і x є коінтегрованими порядку CI(d,b) (вектор β називають коінтеграційним).
Тобто, якщо два (або більше ряди) є пов'язаними у формі рівноважного відношення у довгостроковому періоді, то навіть якщо ряди можуть включати стохастичні тренди (тобто, не бути стаціонарними), вони у будь-якому разі матимуть схожу динаміку таким чином, щоб (лінійна) комбінація між ними була стабільною (тобто стаціонарною). Коінтеграція є відображенням довгострокової рівноваги відношень між змінними.

Приклади коінтеграції

- Відношення *C/Y*, *I/Y*, *K/Y* є постійними у рівновазі. Якщо ВВП має одиничний корінь, тоді споживання, інвестиції і обсяг капіталу також мають бути нестаціонарними. Більш того, ці три змінні мають бути коінтегрованими з ВВП
- Паритет купівельної спроможності: $p = e\ p^*$
- Рівень збереження має бути стаціонарними (відповідно до деяких теорій): $s = y - c$
- Рівняння попиту на гроші: $M/P = f(Y,i)$

Оцінювання коінтеграційного вектору

- Коінтеграційний вектор β оцінюється за допомогою стандартного МНК, який дає суперконсистентну оцінку: вона прямує до свого справжнього значення. Однак, є факти щодо наявності зсуву у малих вибірках.

Моделювання короткострокової динаміки – 1

Коінтеграція відноситься до довгострокової динаміки чи рівноважного стану. Виникає питання: як моделювати короткострокову динаміку за наявності одиничних коренів?

Для запобігання хибної регресії можна використовувати диференційовані дані. Але при цьому втрачається інформація про довгострокові звʼязки.

Моделювання короткострокової динаміки – 2

Припустимо, економічна теорія говорить, що існує зв’язок між *y* та *x*, причому обидві змінні мають одиничні корені. Природно виглядає рівняння:

$$\Delta y_t = \beta \Delta x_t + e_t$$

У рівноважному стані ці змінні будуть у рівновазі, але в рівнянні не враховується довгостроковий зв’язок між змінними, тобто відбувається втрата інформації.

Моделювання короткострокової динаміки – 3

- Виходом є використання механізму корекції похибок
- (ECM – Error Correction Mechanism).

- Якщо довгостроковий зв'язок існує, то можна використовувати наступне представлення:

$$\Delta y_t = \lambda \Delta x_t - \mu(y_{t-1} - \alpha + \beta x_{t-1}) + e_t$$

де μ – швидкість пристосування

VECM: **векторна модель корекції похибок**

Позначимо вектор змінних через zt

Припустимо відношення (як і для y та x раніше):

$$z_t = A_1 z_{t-1} + \ldots + A_k z_{t-k} + u_t \qquad u_t \sim N(0, \Sigma)$$

$$\Delta z_t = \Gamma_1 \Delta z_{t-1} + \ldots + \Gamma_k \Delta z_{t-k} + \Pi z_{t-1} + u_t$$

$$\Gamma_i = -(I - A_1 - \ldots - A_i) \qquad i = 1, \ldots, k-1$$

$$\Pi = -(I - A_1 - \ldots - A_k) = \alpha\beta'$$

α є швидкістю пристосування

β є вектором довгострокових відношень (коінтеграційним вектором)

$\beta' z_{t-1}$ є відображенням корекції похибок

VECM: приклад – 1

Припустимо, що z_t включає три змінні, і 2 коінтеграційні відношення (*k=2*)

$$\begin{bmatrix}\Delta y_t\\ \Delta x_t\\ \Delta h_t\end{bmatrix}=\Gamma_1\begin{bmatrix}\Delta y_{t-1}\\ \Delta x_{t-1}\\ \Delta h_{t-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{t-1}\\ x_{t-1}\\ h_{t-1}\end{bmatrix}$$

Оцінювання одиничного рівняння з ECM призведе до оцінювання лише одного з відношень, тобто коефіцієнти іншого будуть прирівняні до 0.

VECM: приклад – 2

Припустимо 2 коінтеграційні вектори. Оцінюємо ЕСМ:

$$\begin{bmatrix}\alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{21}+\alpha_{22}\beta_{22} & \alpha_{31}\beta_{31}+\alpha_{32}\beta_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{t-1}\\ x_{t-1}\\ h_{t-1}\end{bmatrix}$$

Таким чином, оцінюючи ЕСМ, неможливо визначити 2 коінтеграційні вектори, а лише їх лінійну комбінацію.

Тестування на коінтеграцію: процедура Інгла і Грейнджера

Коли досліджується одиничне рівняння, то легко можна тестувати коінтеграцію (наприклад, за допомогою процедури Інгла і Грейнджера):

- Якщо очікується, що два або більше рядів є пов'язаними у довгостроковому періоді, то використовуючи МНК, оцінюємо рівняння: $y_t = \beta x_t$
- Зберігаємо залишки: $e_t = y_t - \beta x_t$
- Проводимо ADF тест над залишками (зауваження: не потрібно включати в тест константу чи/або тренд)
- Оцінюємо модель корекції похибок
- Оцінюємо адекватність моделі

Тестування на коінтеграцію: методика Йохансена – 1

Використовуємо VECM представлення:

$$\Delta z_t = \Gamma_1 \Delta z_{t-1} + \ldots + \Gamma_k \Delta z_{t-k} + \Pi z_{t-1} + u_t$$

$$\Gamma_i = -(I - A_1 - \ldots - A_i) \qquad i = 1, \ldots, k-1$$

$$\Pi = -(I - A_1 - \ldots - A_k) = \alpha\beta'$$

- Тест Йохансена базується на оцінці рангу матриці *П*
- Ранг матриці показує кількість незалежних рядків і стовпчиків у матриці
- Якщо *z* має розмірність *n x 1*, то *П – n x n*
- Якщо ряди є коінтегрованими, то похибки в VECM мають бути стаціонарними, тобто $Пz_{t-1}$ має бути I(0)

Тестування на коінтеграцію: методика Йохансена – 2

Існує 3 можливих сценарії, щоб Πz_{t-1} задовольняв умові стаціонарності:

1. Всі змінні у *z* є стаціонарними, отже можна використовувати VAR у рівнях, *П* має повний ранг ($r = n$).
2. Якщо не має коінтеграції, то *П* має нульовий ранг, і необхідно оцінювати VAR у різницях.
3. *П* має ранг $r < n$. Якщо матриця не має повний ранг, тоді мають бути пов'язані компоненти.

(Тест Йохансена є тестом на нулі у швидкості пристосування вектору α)

ОГЛЯД

Опис моделі

Нехай досліджується *n* змінних, кожна з яких спостерігалася протягом *T* періодів.

Тоді найпростіша VAR-модель описується системою рівнянь

$$y_{i,t} = c_i + a_{i1}^{(1)} y_{1,t-1} + a_{i2}^{(1)} y_{2,t-1} + \ldots + a_{in}^{(1)} y_{n,t-1} +$$

$$+ a_{i1}^{(2)} y_{1,t-2} + a_{i2}^{(2)} y_{2,t-2} + \ldots + a_{in}^{(2)} y_{n,t-2} + \ldots +$$

$$+ a_{i1}^{(p)} y_{1,t-p} + a_{i2}^{(p)} y_{2,t-p} + \ldots + a_{in}^{(p)} y_{n,t-p} + \varepsilon_{i,t}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Оцінювання моделі

Очевидно, що оцінити таку модель неважко за допомогою методу найменших квадратів. Оскільки існує n рівнянь, то необхідно застосувати цей метод n разів.

Види VAR моделей

- VAR моделі у приведеній формі
- Рекурсивні VAR моделі
- Структурні VAR моделі
- VECM (веторні моделі з корекцією похибок) і SVECM (структурні VECM) для інтегрованих рядів

Загальні принципи ідентифікації

- Визначення цілі VAR моделі (наприклад, якщо VAR модель використовується лише для прогнозування, то ідентифікація взагалі не потрібна).
- Використання економічної теорії для встановлення порядку змінних чи накладення обмежень
- Тестування стійкості
- Аналіз функцій відгуку на імпульси

Визначення коінтеграції

Припускаємо 2 змінні з порядком інтеграції d (I(d)) і рівняння між ними:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$$

Якщо β є таким вектором, що εt є I(d-b), тоді y і x є коінтегрованими порядку CI(d,b) (вектор β називають коінтеграційним).
Тобто, якщо два (або більше ряди) є пов'язаними у формі рівноважного відношення у довгостроковому періоді, то навіть якщо ряди можуть включати стохастичні тренди (тобто, не бути стаціонарними), вони у будь-якому разі матимуть схожу динаміку таким чином, щоб (лінійна) комбінація між ними була стабільною (тобто стаціонарною). Коінтеграція є відображенням довгострокової рівноваги відношень між змінними.

Тестування на коінтеграцію: процедура Інгла і Грейнджера

Коли досліджується одиничне рівняння, то легко можна тестувати коінтеграцію (наприклад, за допомогою процедури Інгла і Грейнджера):

- Якщо очікується, що два або більше рядів є пов'язаними у довгостроковому періоді, то використовуючи МНК, оцінюємо рівняння: $y_t = \beta x_t$
- Зберігаємо залишки: $e_t = y_t - \beta x_t$
- Проводимо ADF тест над залишками (зауваження: не потрібно включати в тест константу чи/або тренд)
- Оцінюємо модель корекції похибок
- Оцінюємо адекватність моделі

Тестування на коінтеграцію: методика Йохансена – 1

Використовуємо VECM представлення:

$$\Delta z_t = \Gamma_1 \Delta z_{t-1} + \ldots + \Gamma_k \Delta z_{t-k} + \Pi z_{t-1} + u_t$$

$$\Gamma_i = -(I - A_1 - \ldots - A_i) \qquad i = 1, \ldots, k-1$$

$$\Pi = -(I - A_1 - \ldots - A_k) = \alpha\beta'$$

- Тест Йохансена базується на оцінці рангу матриці *П*
- Ранг матриці показує кількість незалежних рядків і стовпчиків у матриці
- Якщо *z* має розмірність *n x 1*, то *П – n x n*
- Якщо ряди є коінтегрованими, то похибки в VECM мають бути стаціонарними, тобто Πz_{t-1} має бути I(0)

Тестування на коінтеграцію: методика Йохансена – 2

Існує 3 можливих сценарії, щоб Πz_{t-1} задовольняв умові стаціонарності:

1. Всі змінні у z є стаціонарними, отже можна використовувати VAR у рівнях, Π має повний ранг ($r = n$).
2. Якщо не має коінтеграції, то Π має нульовий ранг, і необхідно оцінювати VAR у різницях.
3. Π має ранг $r < n$. Якщо матриця не має повний ранг, тоді мають бути пов’язані компоненти.

(Тест Йохансена є тестом на нулі у швидкості пристосування вектору α)

ПИТАННЯ?

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!