# Теорія часових рядів

*К.е.н., доц. Ставицький А.В.*

www.andriystav.cc.ua

# План

1. Основні визначення
2. Порядок аналізу часових рядів
3. Лаговий оператор
4. Адитивна та мультиплікативна моделі часових рядів
5. Міри точності прогнозів
6. Числові характеристики часових рядів

# 1. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ

# Поняття часових рядів

В сучасній статистичній теорії існує багато різноманітних методів прогнозування економічної інформації.

Особливістю прогнозування часових рядів є те, що аналізуються лише дані спостережень без додаткової інформації, без аналізу впливу зовнішніх сил. Звичайно, такий аналіз виглядає досить неповним, але доволі часто прогнози часових рядів є більш точними.

# Часовий ряд

Нехай $y_1, y_2, \ldots, y_T$ - значення спостережень за економічним процесом протягом *T* періодів.

Ця послідовність є числовими значеннями, кожне з яких має відповідний індекс, який залежить від номера періоду, в який він спостерігався.

Така послідовність, записана у порядку зростання індексу, називається **часовим рядом.**

Будемо позначати часовий ряд з *T* елементами

$$\{Y_T\}$$

# Мета аналізу часових рядів

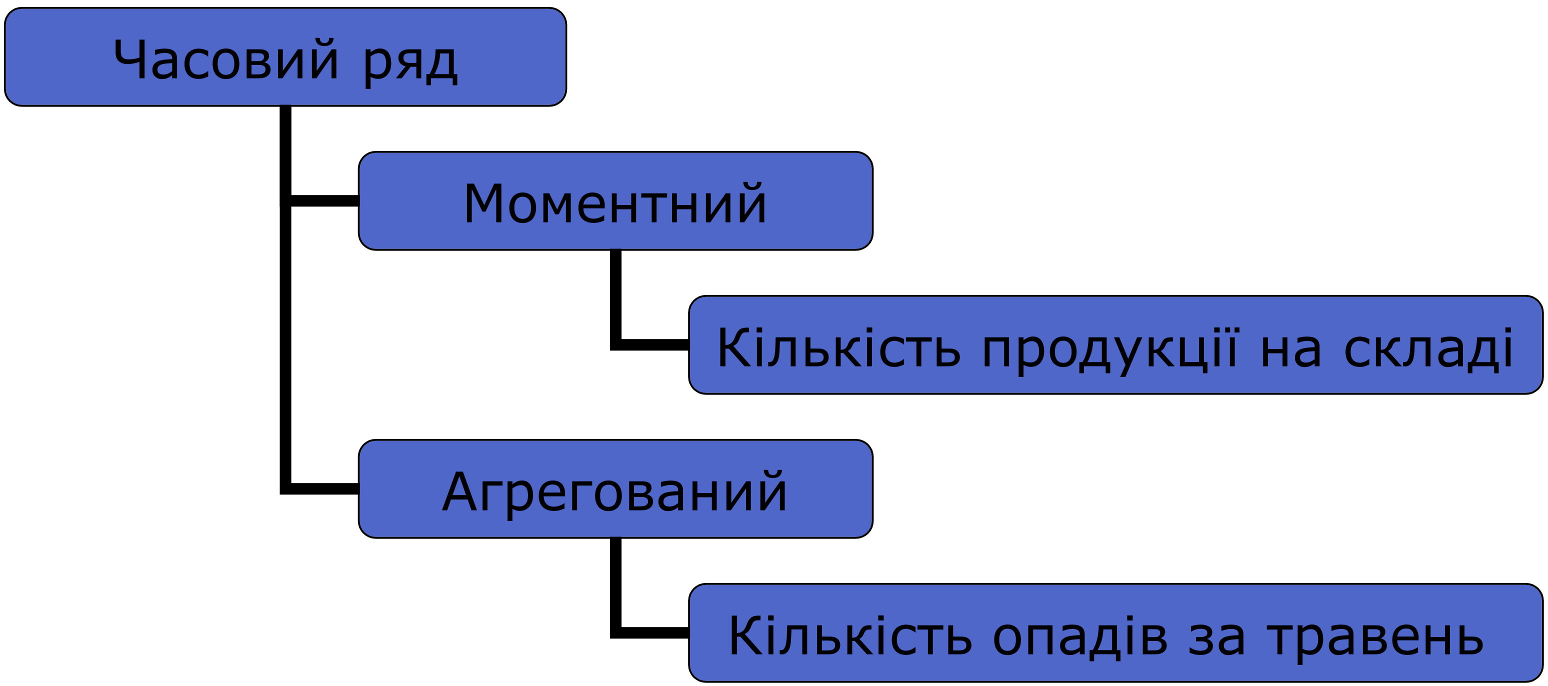
Метою прикладного статистичного аналізу часових рядів є **побудова математичної моделі ряду**, за допомогою якої можна пояснити поведінку ряду і **здійснити прогноз** на майбутні періоди.

$$\hat{y}_{T+1} - ?$$

# Класифікація часових рядів - 1

- Часовий ряд
  - Неперервний
    - Температура повітря в місцевості
  - Дискретний
    - Випуск автомобілів заводом

# Класифікація часових рядів - 2



# Періоди спостережень

Хоча вимога рівності проміжків між двома спостереженнями здається цілком природною, при аналізі часових рядів це питання треба попередньо досліджувати й уточнити, наприклад, при різній кількості днів в місяцях року.

# Кількість спостережень

Важливим моментом, який треба враховувати, приступаючи до аналізу часових рядів, є довжина часового ряду або кількість зроблених спостережень.

Як правило, вважається, що якщо ряд містить більше 50 спостережень, то це достатньо для статистичного обґрунтування висновків. Але на практиці, довжина ряду буває набагато меншою.

# 2. ПОРЯДОК АНАЛІЗУ ЧАСОВИХ РЯДІВ

# Порядок аналізу часових рядів

1. Побудова і вивчення графіка
2. Вибір моделі для часового ряду
3. Прогнозування або інтерполяція

# Побудова і вивчення графіка - 1

Табличне уявлення часового ряду й описових статистиків частіше усього не дозволяє зрозуміти характер процесу, у той час як за графіком часового ряду можна зробити досить багато висновків. Надалі вони можуть бути перевірені й уточнені за допомогою розрахунків.

# Побудова і вивчення графіка - 2

Людське око досить упевнено визначає за графіком часового ряду:

1. наявність тренду і його характер;

2. наявність сезонних і циклічних компонентів;

3. ступінь повільності або переривчастості змін послідовних значень ряду після усунення тренду.

# Вибір моделі для ряду

Модель може вважатися підібраною, якщо залишкова компонента ряду є процесом типу, як правило, "білого шуму".

Після підбору залишки аналізуються для перевірки адекватності моделі та побудови надійних інтервалів.

# Прогнозування або інтерполяція

Останнім етапом аналізу часового ряду може бути прогнозування його майбутніх (екстраполяція) або відновлення пропущених (інтерполяція) значень і визначення точності цього прогнозу на базі підібраної моделі.

Неоднозначність вибору моделі може спостерігатися як на етапі виділення детермінованого компонента ряду, так і при виборі структури ряду залишків. Тому досить часто розробляють декілька прогнозів, зроблених за допомогою різних моделей.

# 3. ЛАГОВИЙ ОПЕРАТОР

# Лаговий оператор

**Лаговий оператор** позначають ***B*** (від англійського back–shift) або ***L*** (від німецького der Lagoperator). За його допомогою можна отримувати значення часового ряду як функції від його інших значень.

# Використання лагового оператора - 1

$$By_t = y_{t-1}$$

$$B(By_t) = By_{t-1} = y_{t-2}$$

$$B^k(y_t) = y_{t-k}, \ \ k > 0$$

$$B^{-k}(y_t) = y_{t+k}, \ \ k > 0$$

$$B^0 y_t = y_t$$

# Використання лагового оператора - 2

При роботі з лаговими операторами бажано пам’ятати наступну тотожність:

$$\frac{1}{1-B} = 1 + B + B^2 + B^3 + \ldots$$

За допомогою лагового оператора можна записувати поліноми виду:

$$A_m(B) = a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + \ldots + a_m B^m$$

# Використання лагового оператора - 3

Таким чином, лаговий оператор можна розглядати як деяку змінну, проводячи над нею стандартні математичні дії.

,

$$A_3(B)\cdot y_t = \left(a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + a_3 B^3\right) y_t =$$

$$= a_0 y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3}$$

$$A_4(B)\cdot y_{t-3} = \left(a_0 + a_1 B + a_2 B^2 + a_3 B^3 + a_4 B^4\right) y_{t-3} =$$

$$= a_0 y_{t-3} + a_1 y_{t-4} + a_2 y_{t-5} + a_3 y_{t-6} + a_4 y_{t-7}.$$

# 4. АДИТИВНА ТА МУЛЬТИПЛІКАТИВНА МОДЕЛІ ЧАСОВИХ РЯДІВ

# Структура часового ряду

Будь-який часовий ряд можна представити як суму **детермінованого** та **випадкового** компонентів:

$$y_t = d_t + r_t,\ t = \overline{1,T}.$$

В свою чергу детермінований компонент складається з трьох частин: **трендового, сезонного, циклічного** компонентів.

$$d_t = tr_t + s_t + c_t,\ t = \overline{1,T}.$$

# Адитивна модель

Таким чином, будь-який часовий ряд можна розглядати як суму:

$$y_t = tr_t + s_t + c_t + r_t, \ t = \overline{1,T}.$$

Такий вигляд часового ряду отримав назву **адитивної моделі**.

# Мультиплікативна модель

Якщо ж замість реальних значень компонентів використовувати їх логарифми, то отримаємо **мультиплікативну модель**:

$$\log y_t = \log tr_t + \log s_t + \log c_t + \log r_t, \ t = \overline{1, T},$$

або

$$y_t = tr_t \cdot s_t \cdot c_t \cdot r_t, \quad t = \overline{1, T}.$$

# Компоненти часового ряду - 1

Детермінований компонент змінюється за певними правилами, які можуть бути визначені за допомогою досліджень і відповідного аналізу часового ряду. Як правило, одним з основних параметрів, від яких залежить детермінований компонент, є час.

# **Компоненти часового ряду** - 2

Аналіз часового ряду починається з виділення **трендового компонента**. Його присутність неважко помітити, проаналізувавши графік часового ряду. Як правило, для економічних даних дуже типовим є повільне зростання чи падіння протягом тривалого періоду часу. Звичайно, це не означає, що спостерігається постійне зростання кожного року, але на кожному доволі великому періоді воно є помітним. Наявність **тренду** в економічних часових рядах можна пояснити демографічними змінами, технологічними змінами, змінами в структурі виробництва, попиту тощо. Дія таких факторів є постійною, тому дослідники мають змогу описувати такі зміни за допомогою кривих, які можна задати в аналітичному вигляді.

# Компоненти часового ряду - 3

**Сезонний компонент** показує коливання навколо трендового компонента. Його наявність пояснюється сезонним характером виробництва, споживання. Наприклад, у четвертому кварталі кожного року перед Новим роком значно зростає споживання товарів. Головна ідея виділення сезонних коливань полягає у порівнянні даних за відповідні періоди, а не за минулі періоди, тобто, наприклад, дані за грудень одного року треба порівнювати з даними грудня минулих років, а не з листопадом.

# Компоненти часового ряду - 4

**Циклічний компонент** займає проміжне місце між трендом та сезонним компонентом. Тренд – це гладка зміна, яка проявляється на великому проміжку часу. Сезонний компонент – це періодична функція, що залежить від часу, причому його період значно менший за кількість спостережень. Циклічний компонент розглядається, в основному, як гладка зміна, залежна від часу, але яка не включається ні до тренду, ні до сезонного компонента.

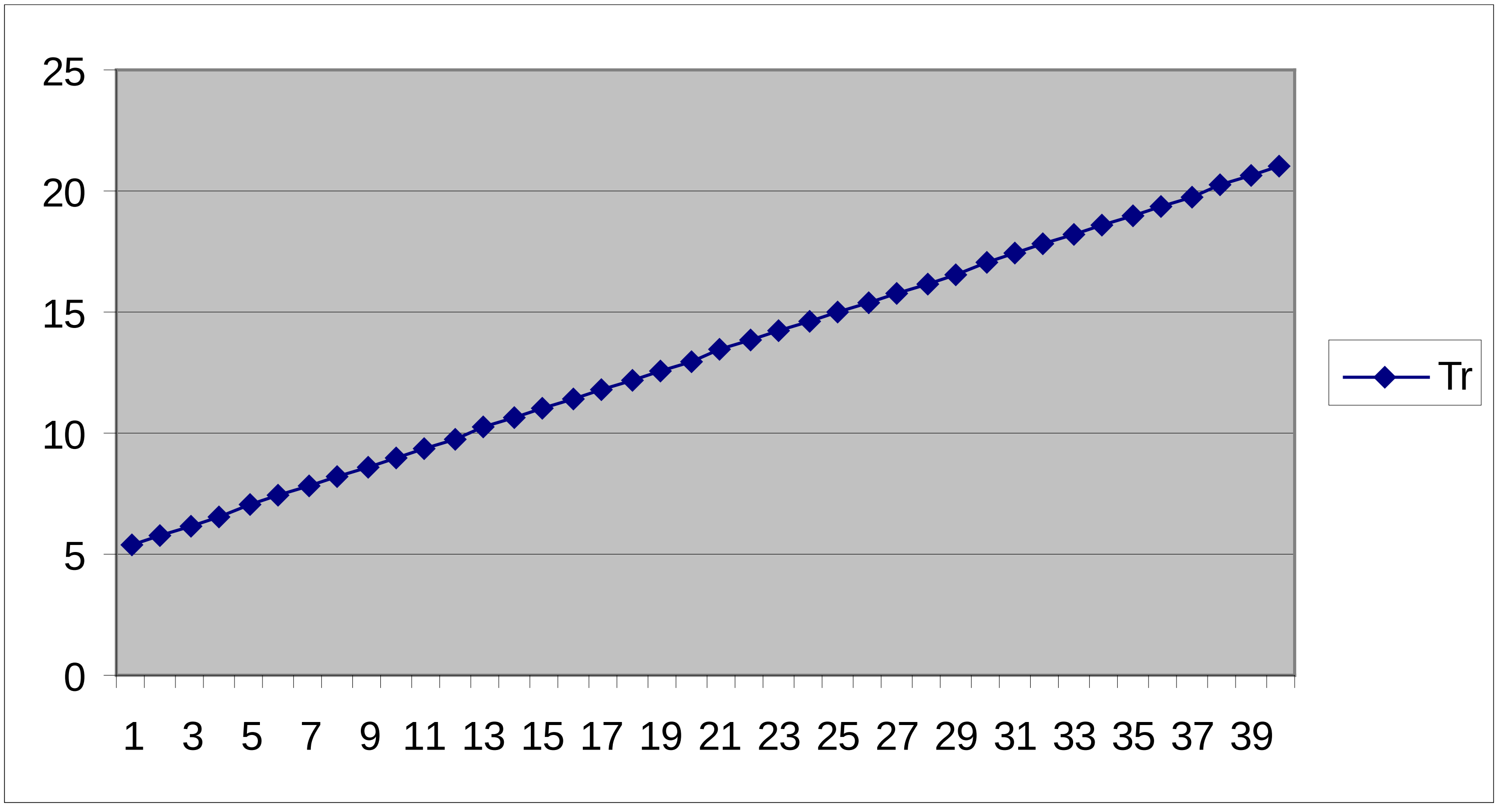
# Компоненти часового ряду - 5

**Випадковий компонент** є те, що залишилось від часового ряду після виключення тренду, циклічного та сезонного компонентів. Частина таких ефектів може бути віднесена до непередбачених природних катаклізмів (землетруси, пожежі, тощо), частина – до випадкових дій людей. За наявності випадкової компоненти неможливо прогнозувати значення часового ряду без помилки. Але будь-який реальний економічний процес включає випадковий компонент.

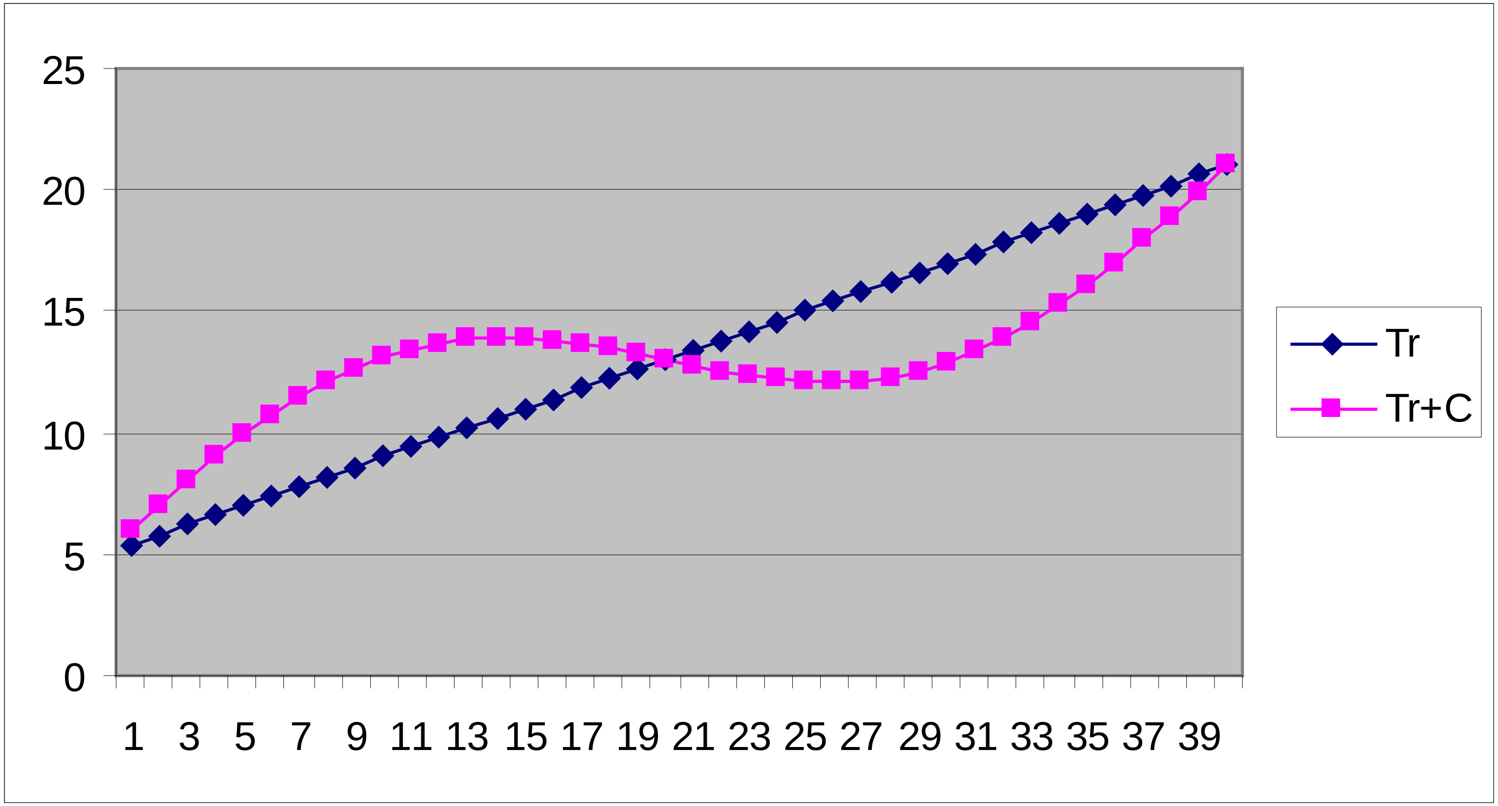
# **Компоненти часового ряду** - 6

Від значення кожного компонента залежить значення часового ряду у кожний період спостережень. Але не завжди представляється можливим характеризувати кожний компонент окремо. Іноді краще робити прогноз відносно всієї моделі, ніж намагатися виділити кожний компонент окремо.

# Приклад

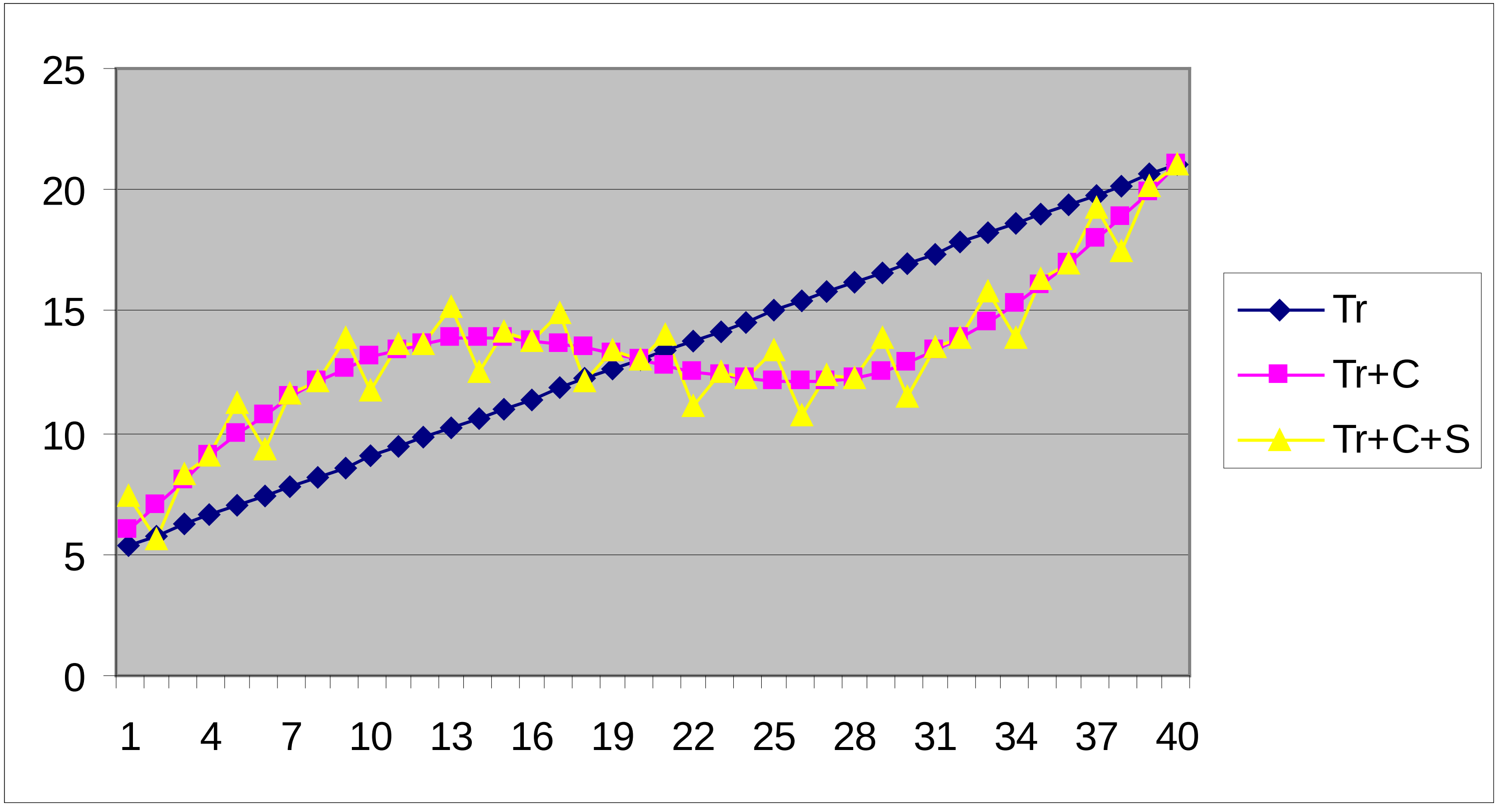


# Приклад

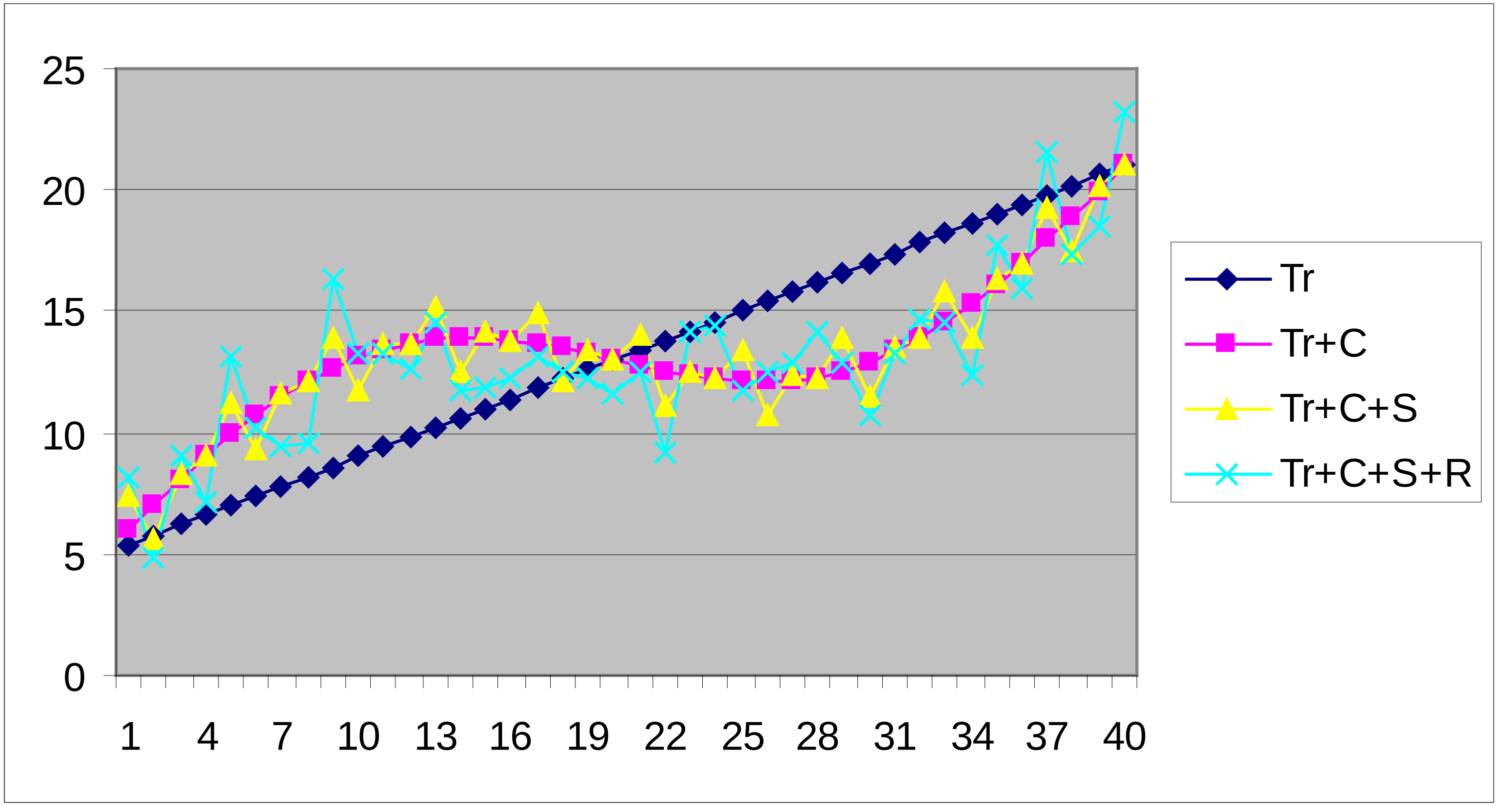


25
20
15
10
5
0
1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21 23 25 27 29 31 33 35 37 39
Tr
Tr+C

# Приклад



# Приклад



# 5. МІРИ ТОЧНОСТІ ПРОГНОЗІВ

# Міри точності прогнозів - 1

Про точність прогнозу прийнято судити по розміру помилки прогнозу - різниці між прогнозним і фактичним значенням досліджуваної змінної. Проте такий підхід до оцінки точності можливий тільки в двох випадках. По-перше, коли період попередження вже закінчився, і дослідник має фактичні значення змінної. При короткостроковому прогнозуванні це цілком реально. По-друге, коли прогноз розробляється, тобто прогнозування здійснюється для деякого моменту часу в минулому, вже є фактичні дані.

# Міри точності прогнозів - 2

При цьому наявна інформація ділиться на дві частини: одна з них, що охоплює більш ранні дані, служить для оцінювання параметрів прогностичної моделі, друга – більш пізні, які розглядаються як реалізації відповідних прогнозних оцінок. Отримані ретроспективно помилки прогнозу якоюсь мірою характеризують точність застосованої методики прогнозування і можуть виявитися корисними при зіставленні декількох методів.

# Міри точності прогнозів - 3

Перевірка точності одного прогнозу мало що може сказати досліднику. Гарний одиничний прогноз може бути отриманий і по неадекватній моделі, і навпаки, тому про якість прогнозів застосовуваних методик і моделей можна судити лише по сукупності зіставлень прогнозів і їхньої реалізації.

# Міри точності прогнозів - 3

Найбільш простою мірою якості прогнозів за умови, що є дані про їхню реалізацію, може стати відносне число випадків, коли фактична реалізація попадала у довірчий інтервал прогнозу, до загального числа прогнозів, тобто

$$\eta = \frac{m}{m+n}$$

де $m$ – кількість прогнозів, підтверджених фактичними даними;

$n$ – кількість прогнозів, не підтверджених фактичними даними.

# Коефіцієнт Тейла

$$v = \frac{\sqrt{\dfrac{\sum_{t=1}^{n}\left(\hat{y}_t - y_t\right)^2}{n}}}{\sqrt{\dfrac{\sum_{t=1}^{n} y_t^2}{n}}} = \frac{\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\left(\hat{y}_t - y_t\right)^2}}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n} y_t^2}}$$

Коефіцієнт невідповідності може бути використаний при зіставленні якості прогнозів, одержаних на основі різноманітних методів і моделей. У цьому його безсумнівна привабливість.

# Коефіцієнт Тейла - 2

Іноді коефіцієнт Тейла розраховують через середньоквадратичне значення похибки прогнозу приростів:

$$U = \sqrt{\frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\Delta\hat{y}_{T+t} - \Delta y_{T+t}\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\Delta y_{T+t}\right)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(\Delta\hat{y}_{T+t} - \Delta y_{T+t}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n}\left(\Delta y_{T+t}\right)^2}}$$

# Абсолютні критерії точності прогнозів

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{t}\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2$$

середньоквадратична похибка прогнозу за n кроків.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t}\left(y_t - \hat{y}_t\right)^2}$$

корінь із середньоквадратичної похибки прогнозу за n кроків.

$$MAD = \frac{1}{n}\left|y_t - \hat{y}_t\right|$$

середня абсолютна похибка за n кроків.

# Відносні критерії точності прогнозів

$$RMSPE = 100\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t}\left(\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right)^2}$$

корінь із середньоквадратичної похибки у відсотках від фактичних значень за n кроків.

$$MAPE = \frac{100}{n}\sum_{t}\left|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right|$$

середня абсолютна похибка у відсотках за n кроків.

# Оцінка точності макроекономічного прогнозу

| ***MAPE, RMSPE*** | **Точність прогнозу** |
|---|---|
| менше 10% | Висока |
| 10% – 20% | Добра |
| 20% – 30% | Задовільна |
| 30% – 40% | Погана |
| більше 40% | Незадовільна |

# Оцінка точності мікроекономічного прогнозу

| ***MAPE, RMSPE*** | **Точність прогнозу** |
|---|---|
| менше 5% | Висока |
| 5% – 10% | Добра |
| 10% – 15% | Задовільна |
| 15% – 20% | Погана |
| більше 20% | Незадовільна |

# Ефективність прогнозування

1. кількість зусиль, що витрачаються на побудову моделі і наявність готових машинних програм;
2. швидкість, із яким метод уловлює істотні зміни у поведінці ряду, наприклад, раптовий зсув математичного сподівання або збільшення кута нахилу лінії тренду;
3. існування серійної кореляції у помилках;
4. незмінюваність первинних даних;
5. повний обсяг роботи в деяких сферах діяльності - тисячі рядів щомісяця потребують оновлення, невеликі витрати і швидкість мають першорядне значення;
6. терміновість прогнозування.

# Нові критерії точності прогнозів

$$CrMin = \begin{cases} 0, \quad \text{якщо } \sum\limits_{\text{i}=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right) \le 0, \\ -RMSE, \quad \text{якщо } \sum\limits_{\text{i}=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right) > 0. \end{cases}$$

Значення *CrMin* дорівнює 0, якщо прогноз виявився більшим за реальне значення. Якщо ж прогноз виявився меншим за реальне значення, то *CrMin* дорівнює помилці прогнозування, яка є від’ємною. Очевидно, що для підвищення точності, цей критерій необхідно максимізувати:

$$CrMin \to \max$$

# 6. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧАСОВИХ РЯДІВ

# Стаціонарність часових рядів - 1

Для аналізу часових рядів найважливішими моментами є математичне сподівання, дисперсія, коваріація.

$$\mu_t = Ey_t = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_t(x), \text{ де } \quad F_t(x) = P\{y_t < x\}$$

$$\operatorname{var}(y_t) = E(y_t - Ey_t)^2$$

$$\operatorname{cov}(y_t,\ \ y_{t-j}) = E\left((y_t - Ey_t)(y_{t-j} - Ey_{t-j})\right),$$

$$j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

# Стаціонарність часових рядів - 2

Для отримання практичних оцінок для часових рядів користуються формулами:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t$$

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t - \hat{\mu}\right)^2$$

$$\hat{\gamma}_j = \frac{1}{T-j}\sum_{t=j+1}^{T}\left(y_t - \hat{\mu}\right)\left(y_{t-j} - \hat{\mu}\right)$$

# Стаціонарність часових рядів - 3

Часовий ряд є **стаціонарним**, якщо

$$Ey_t = \mu < \infty$$

$$\operatorname{var}(y_t) = \gamma_0 < \infty$$

$$\operatorname{cov}\left(y_t,\ y_{t-j}\right) = \gamma_j < \infty \qquad j = 1, 2, 3, \ldots$$

для всіх значень *t*.

# Стаціонарність часових рядів - 4

Звичайно, жоден з рядів, що представляє реальну економічну інформацію, не може бути ідеально стаціонарним. Але якщо для деякого часового ряду з деяким наближенням виконуються умови стаціонарності, то для його аналізу можна використати широкий спектр методів аналізу та прогнозування стаціонарних часових рядів.

# Функція автокореляції

Крім вищенаведених характеристик при аналіз часових рядів застосовується автокореляція та автокореляційна функція *j*-го порядку

$$\rho_j = \frac{\operatorname{cov}(y_t,\ y_{t-j})}{\operatorname{var}(y_t)} = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}.$$

Цей коефіцієнт визначає ступінь залежності між спостереженнями, які знаходяться на відстані *j* періодів.

# Корелограма

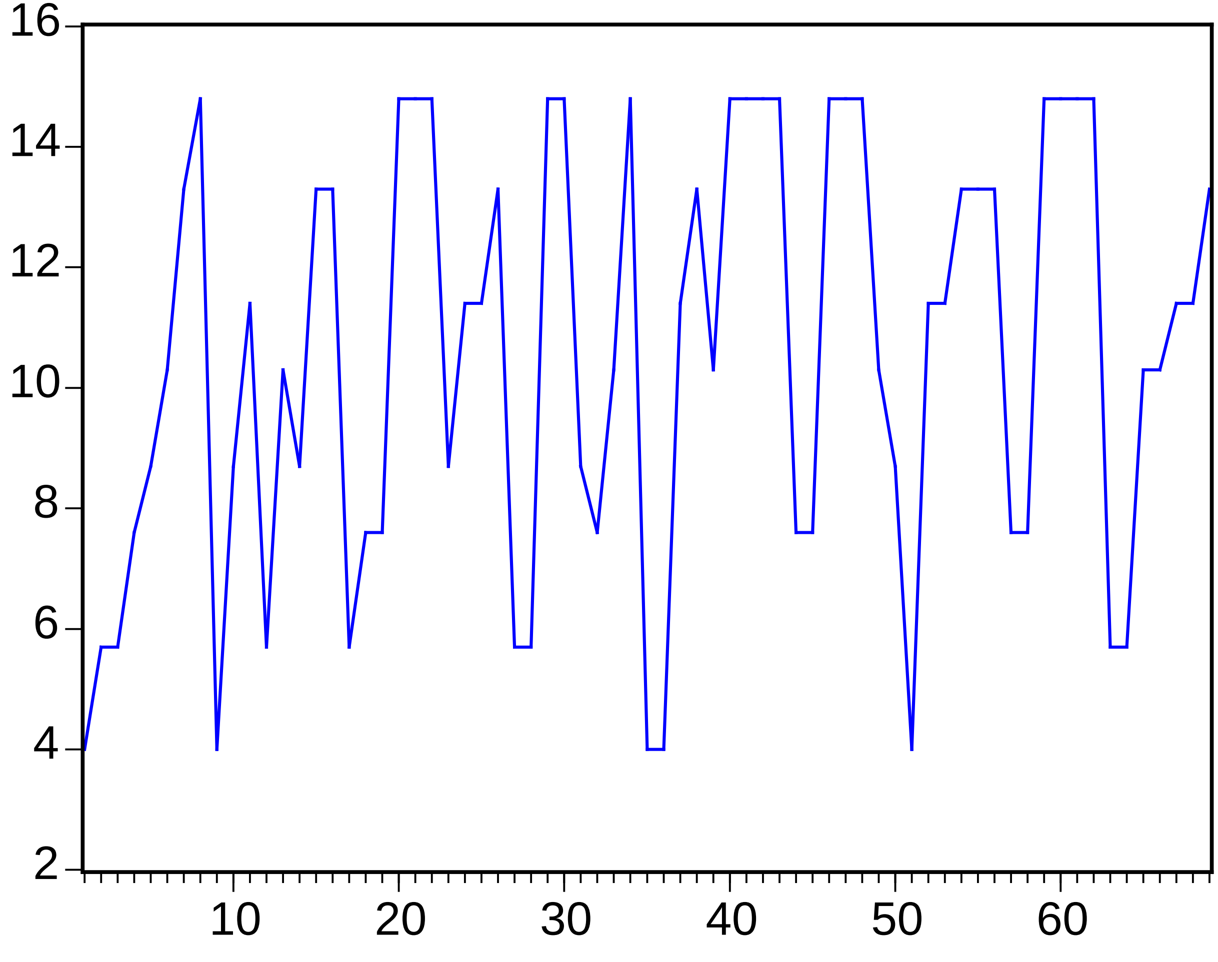
Графік $\rho_j$ називається **корелограмою**

Корелограма представляє деяку криву, що показує як змінюється взаємовплив між спостереженнями в залежності від часу.

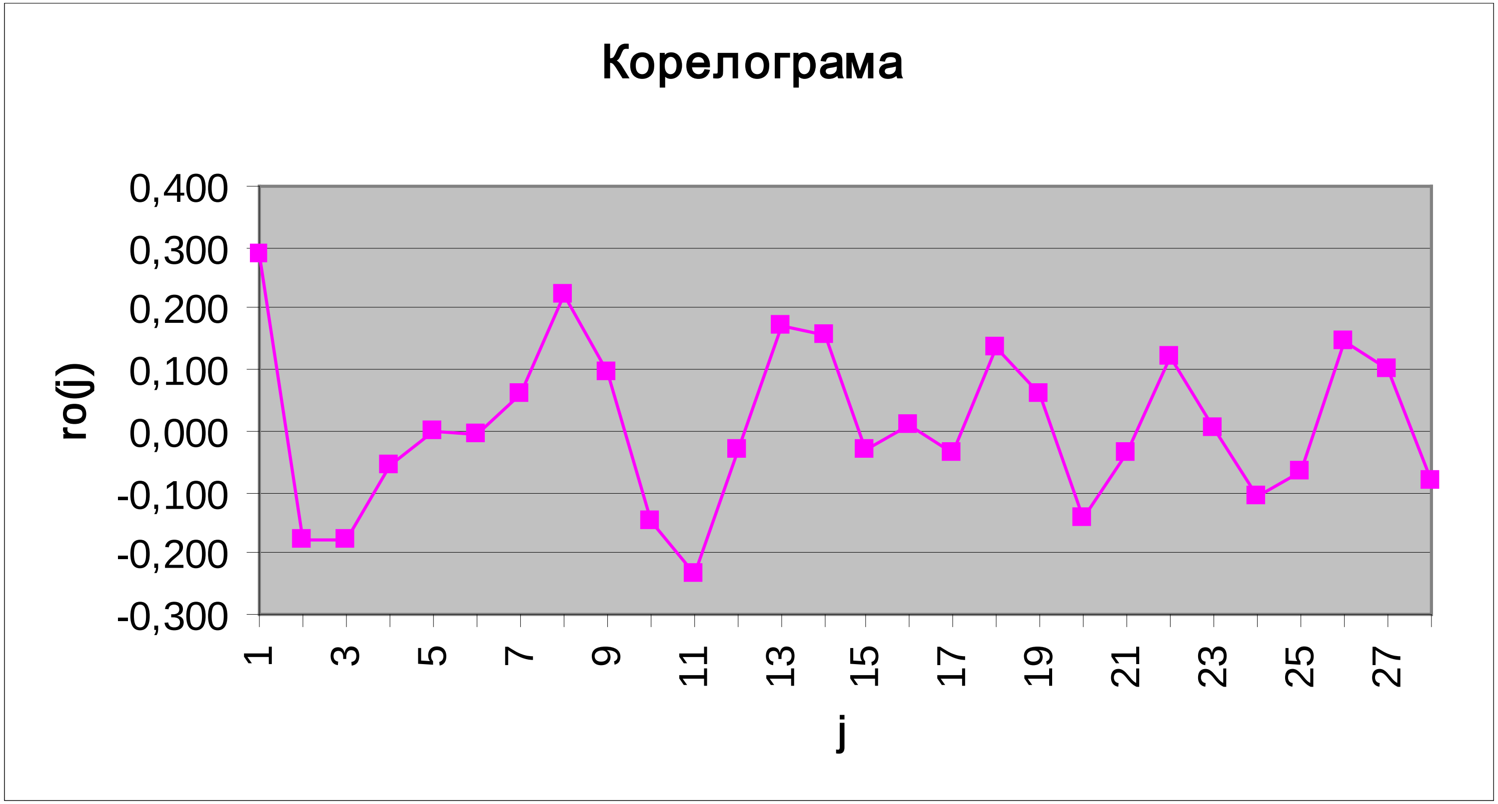
Слід пам'ятати, що

$$\rho_j = \rho_{-j} \ \forall \ j$$

# Приклад: графік



# Приклад: корелограма

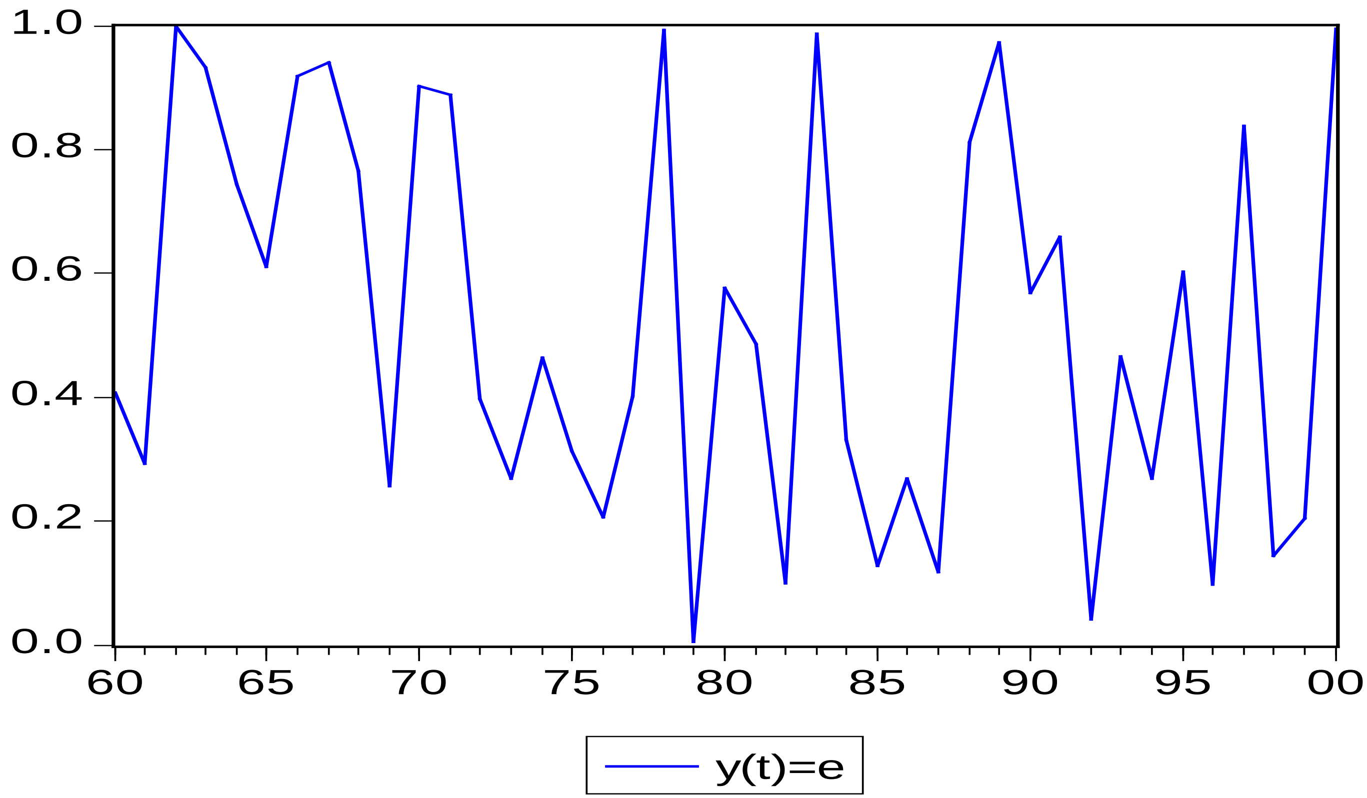


# Випадковий процес - 1

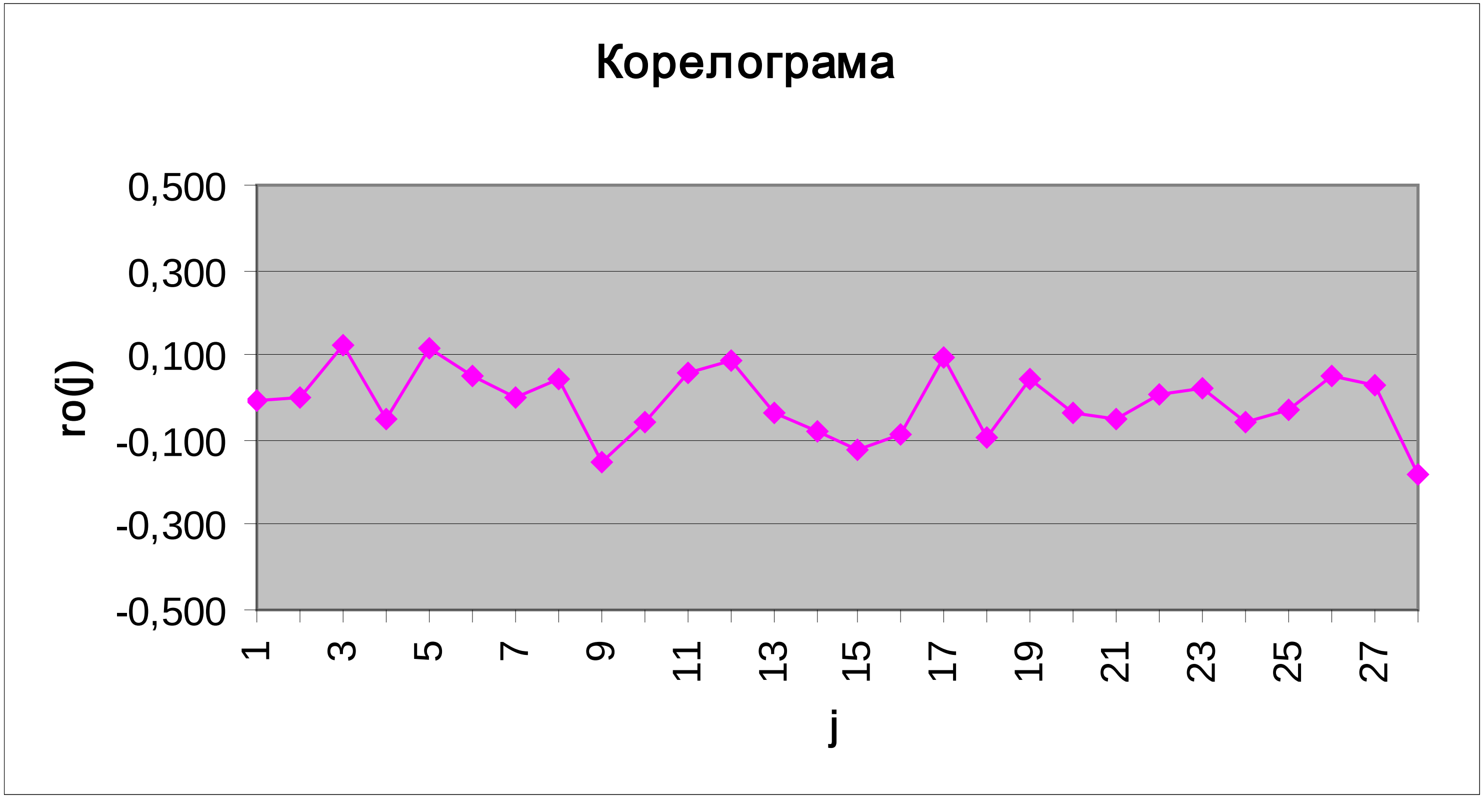
Якщо спостерігається абсолютно випадковий процес з великою кількістю даних, то

$$\rho_j \approx 0$$

# Випадковий процес - 2



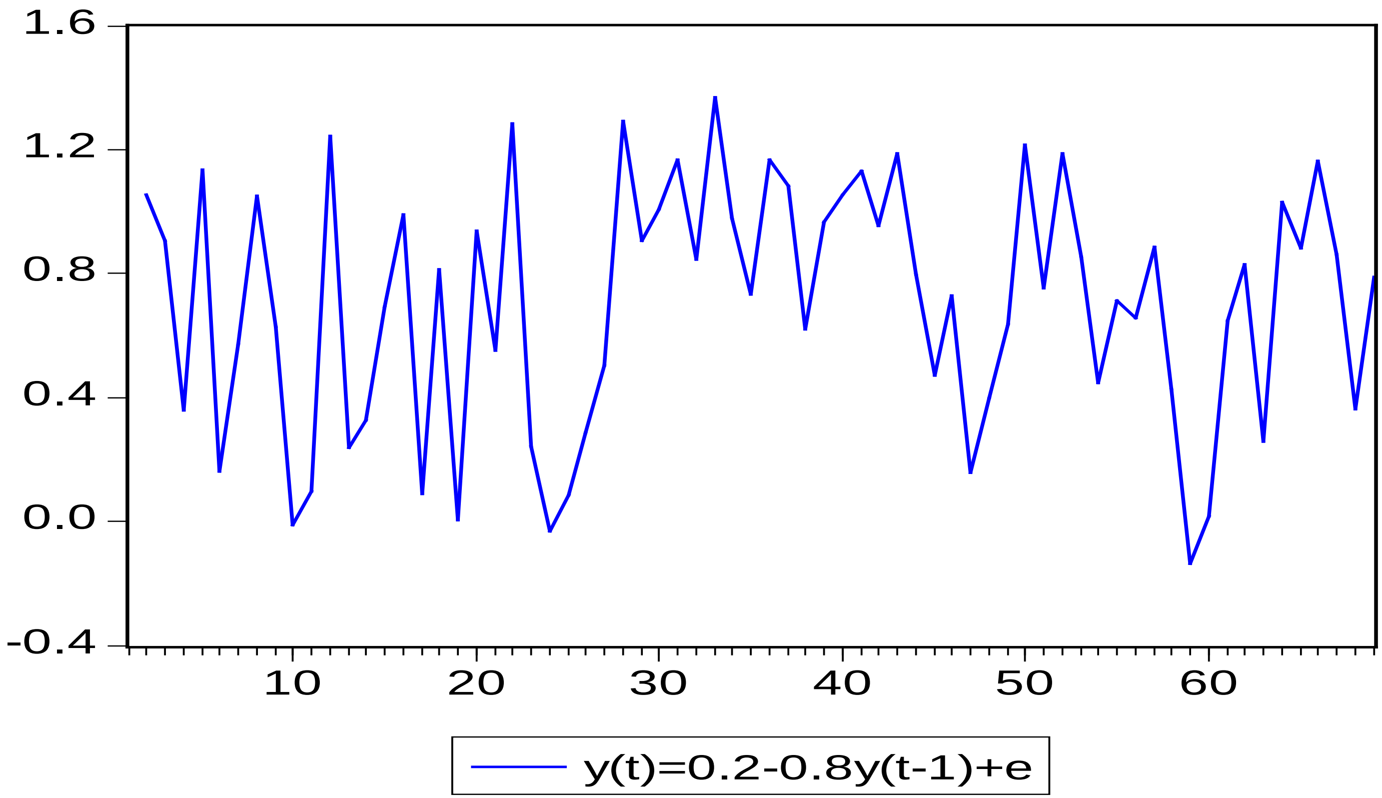
# Випадковий процес - 3



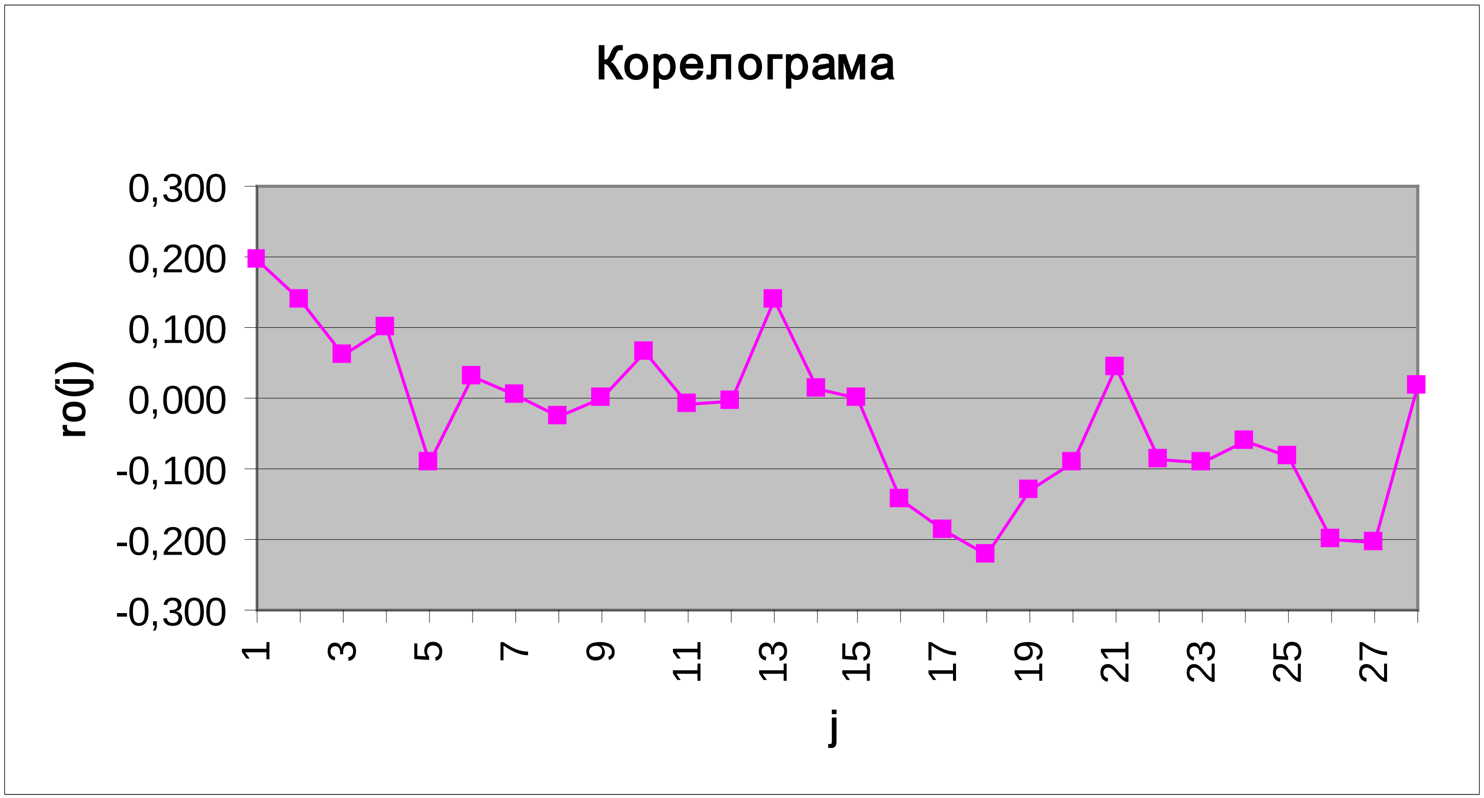
# Короткотермінова залежність - 1

Стаціонарні процеси часто-густо мають короткотермінову залежність між спостереженнями, що проявляється в тому, що декілька перших коефіцієнтів автокореляції є відносно великими в абсолютному значенні по відношенню до всіх інших, які наближаються до нуля. Якщо перші коефіцієнти є додатними, то присутня додатна автокореляція, якщо ж перші коефіцієнти автокореляції постійно змінюють свій знак, то спостерігається від’ємна автокореляція.

# Короткотермінова залежність - 2



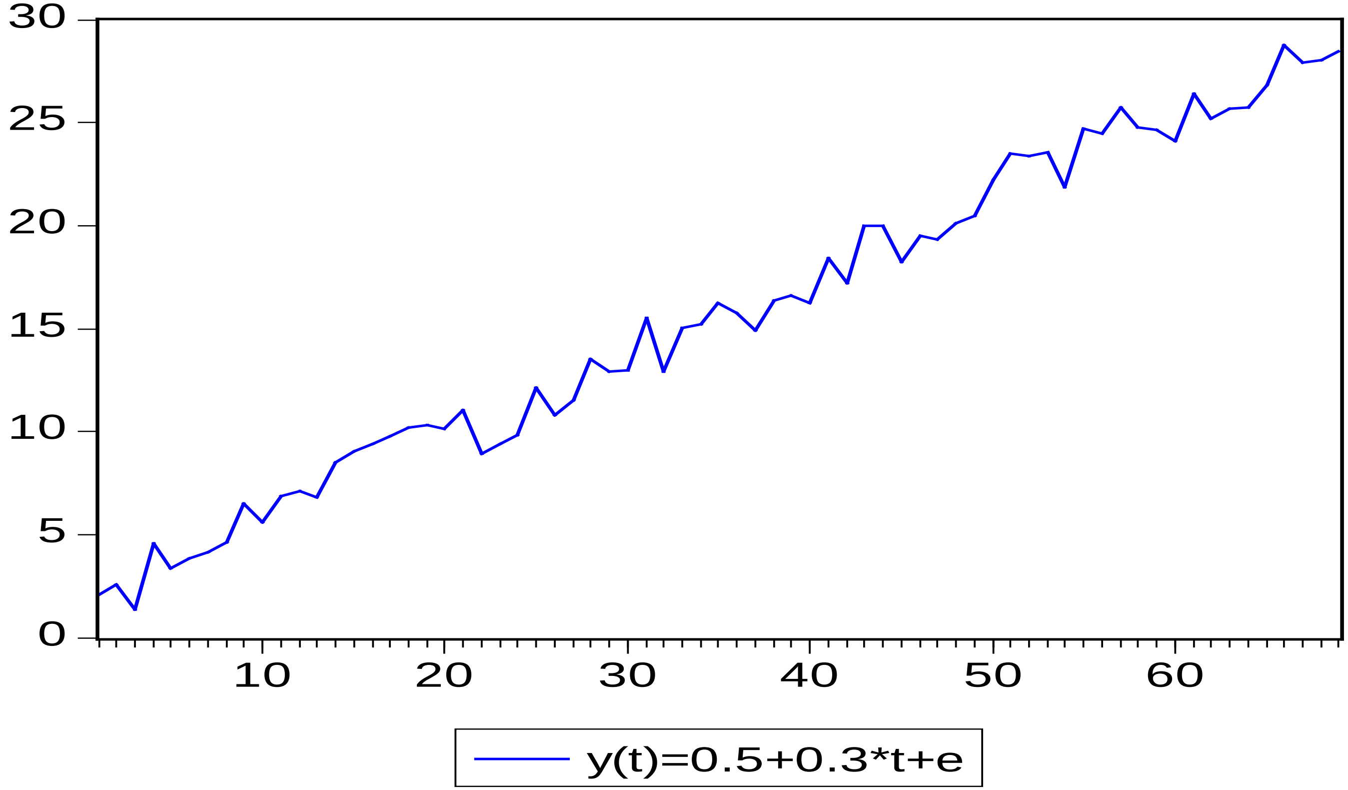
# Короткотермінова залежність - 3



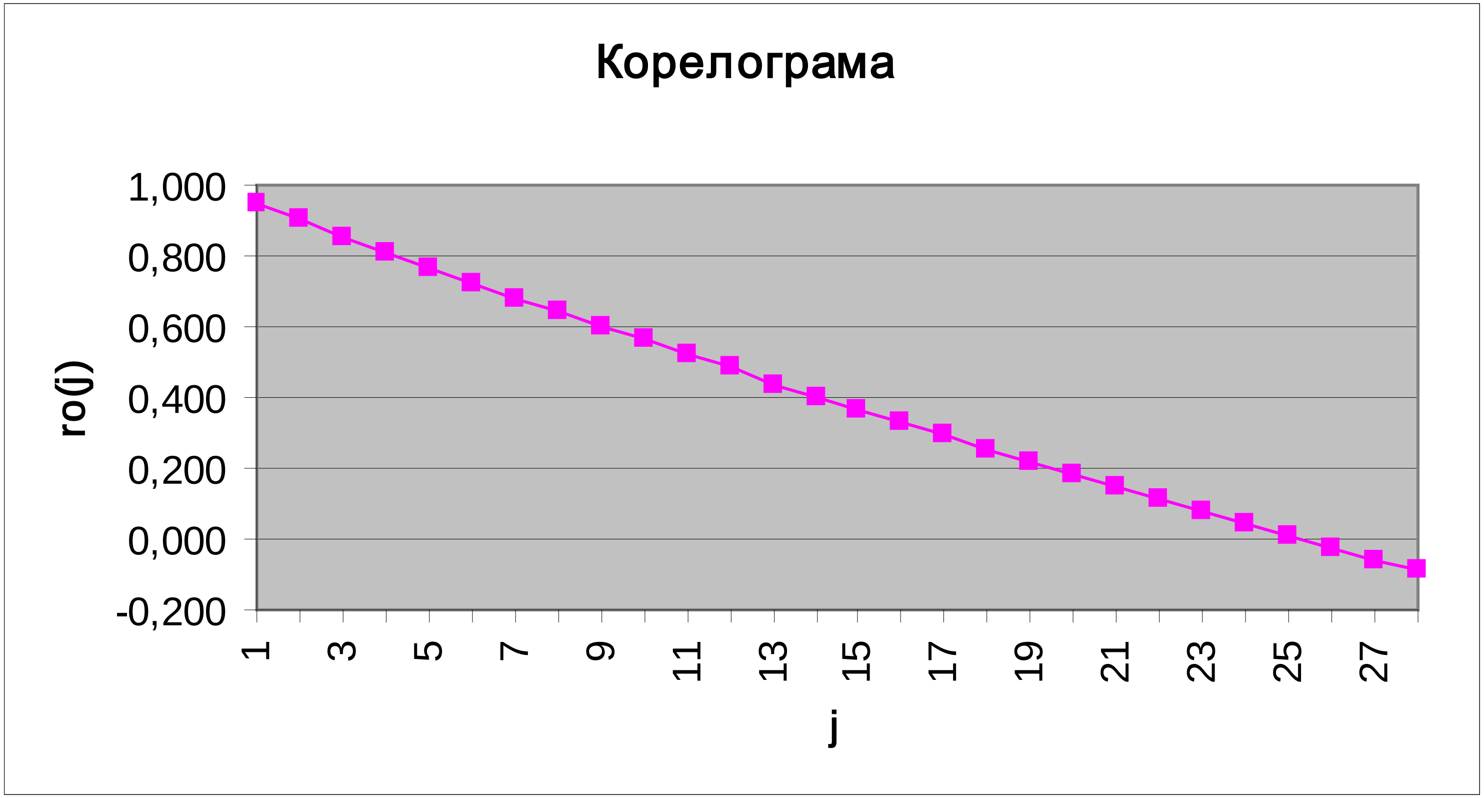
# Нестаціонарні процеси - 1

Часові ряди, які мають чіткий трендовий компонент, значення коефіцієнта автокореляції не буде наближатися до нуля, навіть при досить великих *j*. Тому, як правило, підрахунок функції автокореляції застосовують тільки для стаціонарних часових рядів.

# Нестаціонарні процеси - 2



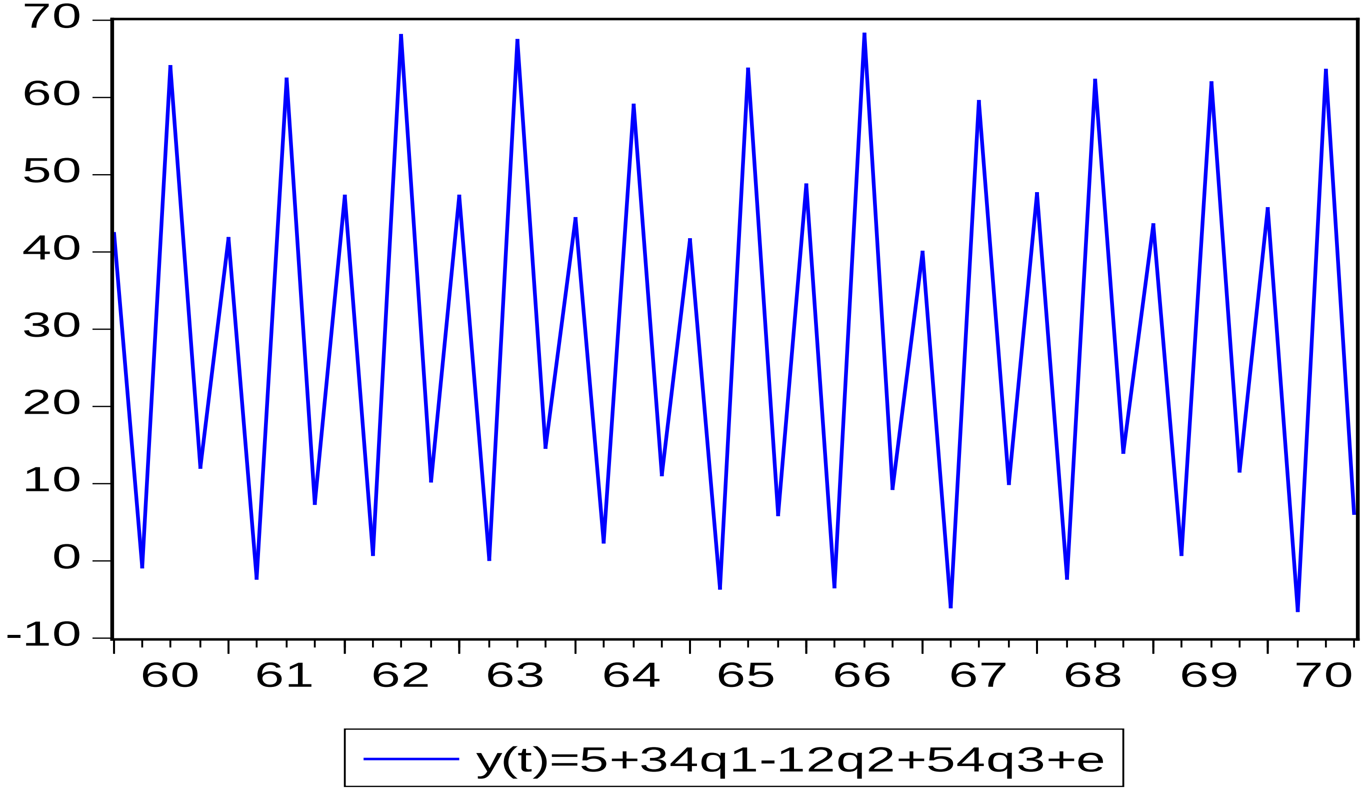
# Нестаціонарні процеси - 3



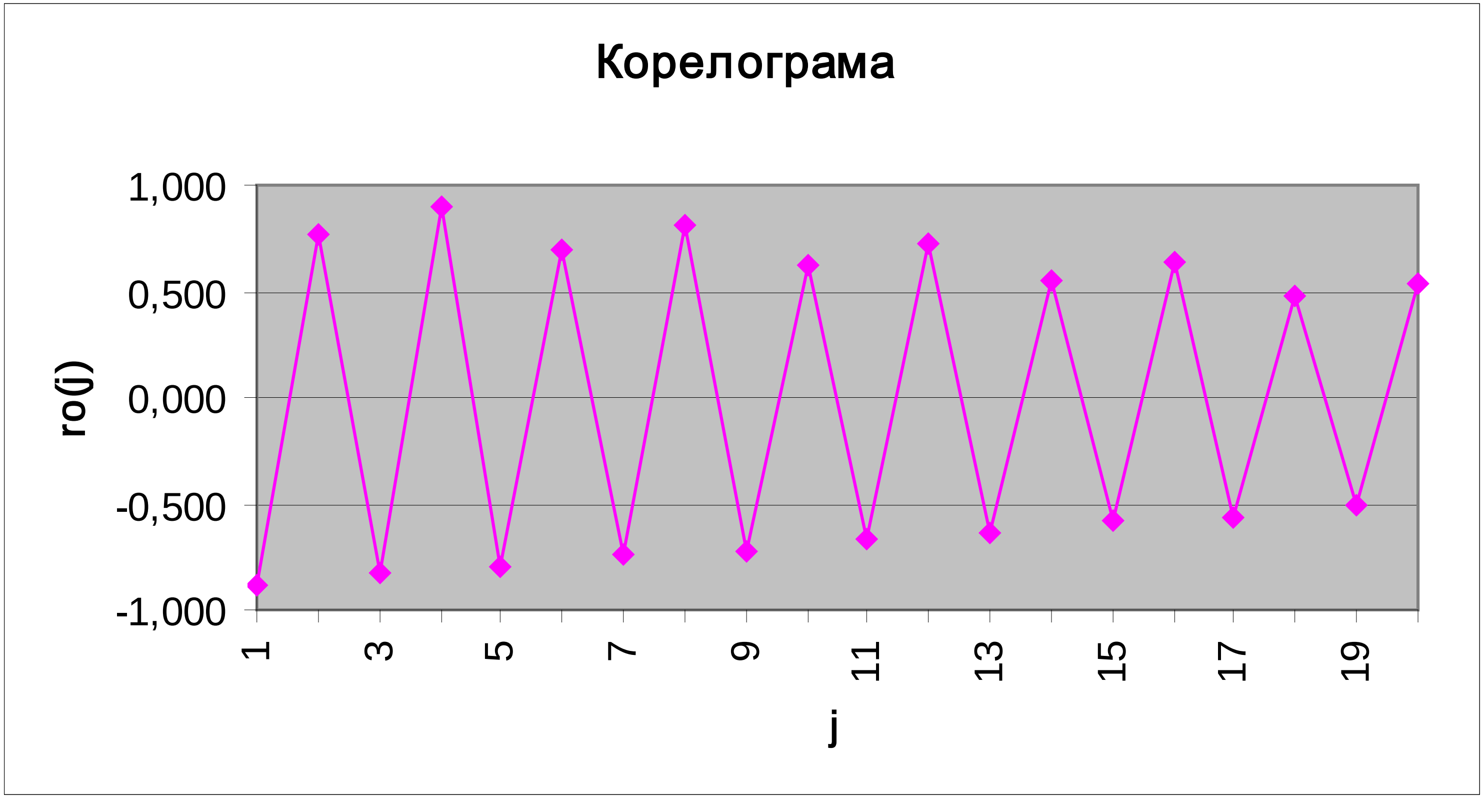
# Сезонні коливання - 1

При наявності сезонних коливань корелограма представлятиме, як правило, затухаючі хвилі однакової частоти. Якщо виділити сезонний компонент, то функція автокореляції покаже справжню залежність між спостереженнями у часі.

# Сезонні коливання - 2



# Сезонні коливання - 3



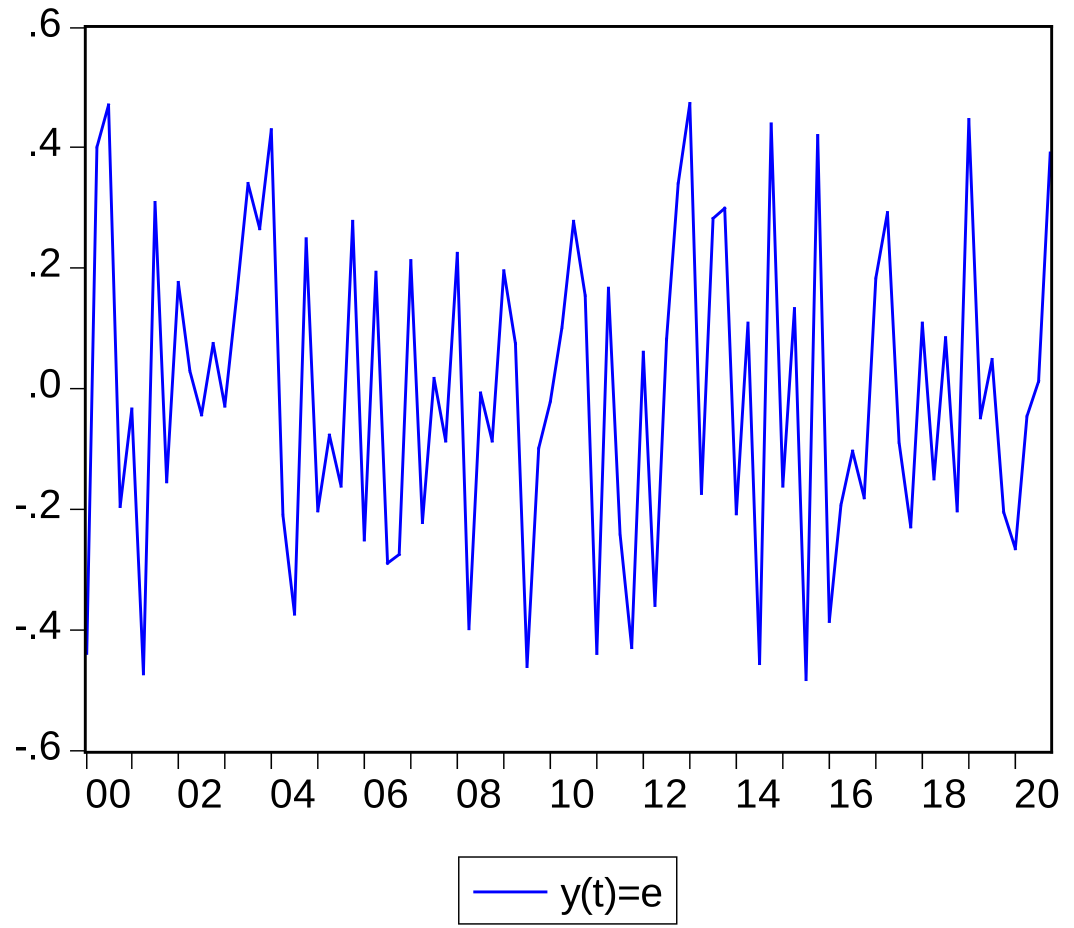
# Часткова автокореляційна функція

Частковим коефіцієнтом автокореляції для лагу k називається коефіцієнт φ(k) в регресії:

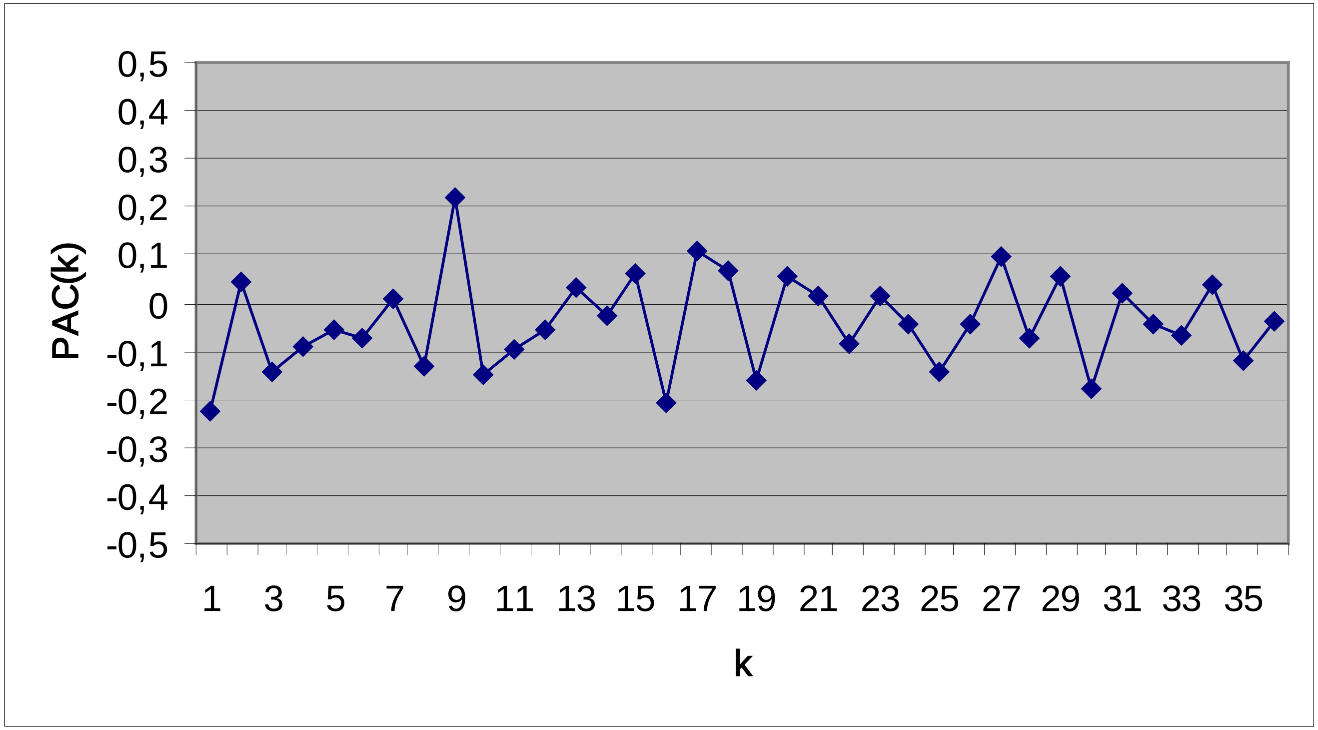
$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \dots$$
$$+ \beta_{k-1} y_{t-(k-1)} + \varphi(k)\, y_{t-k} + \varepsilon_t$$

Значення часткового коефіцієнта кореляції показує залежність між y(t) та y(t-k) без врахування залежності з попередніми лагами.

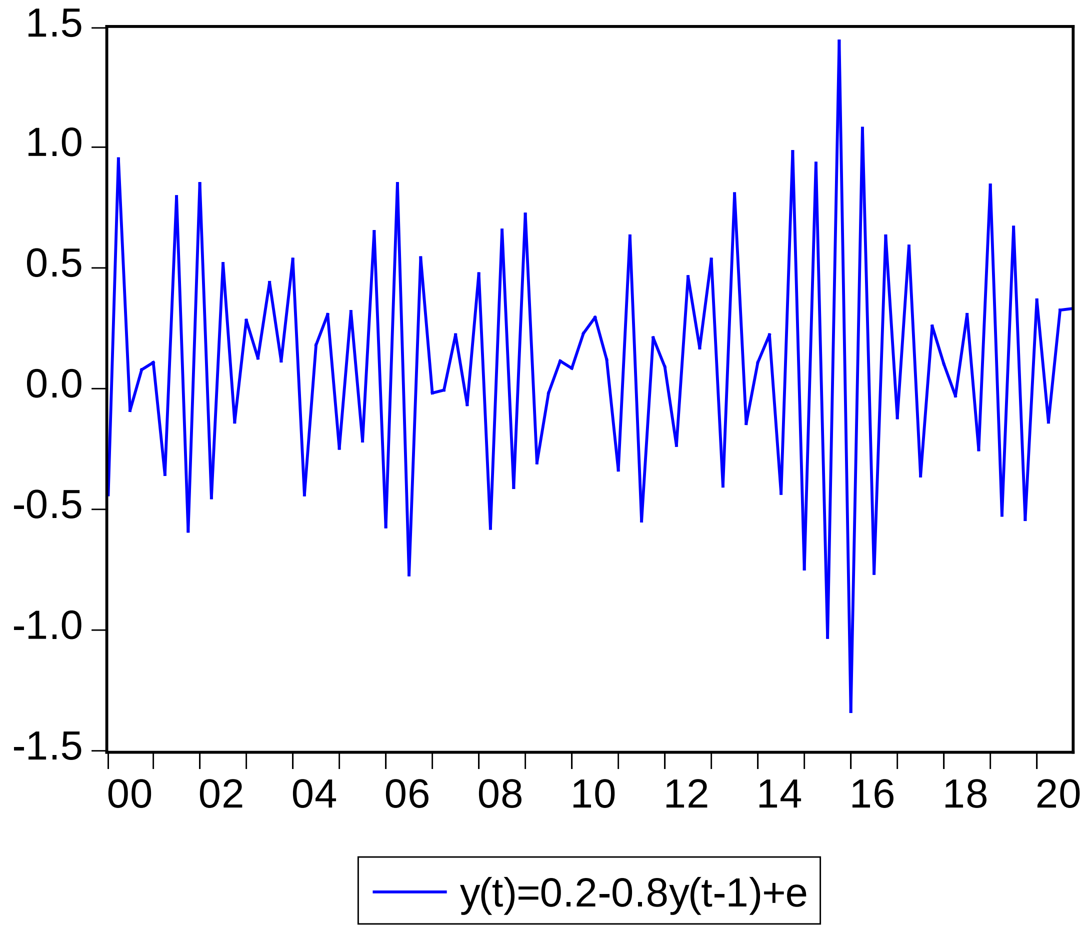
# Випадковий процес - 1



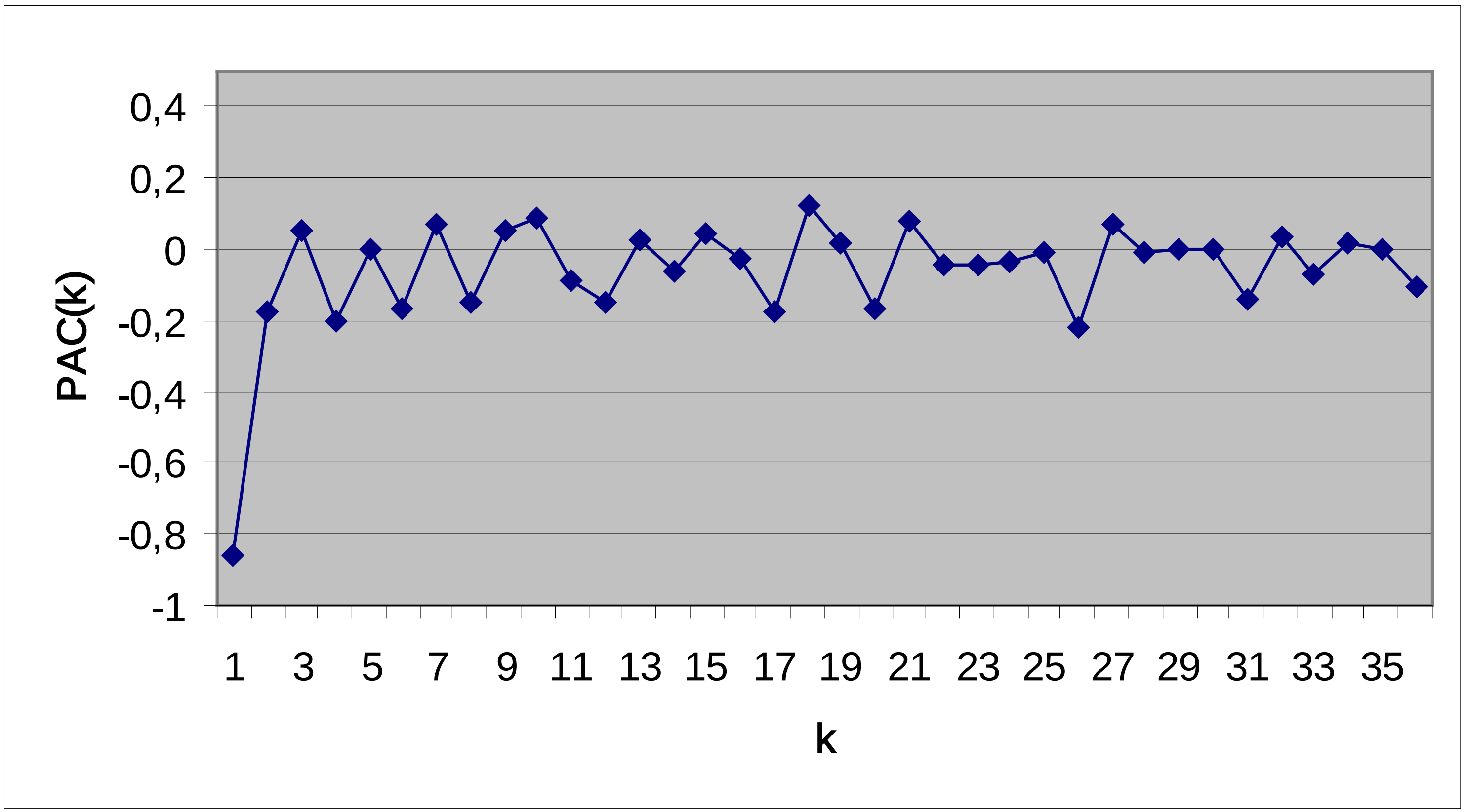
# Випадковий процес - 2



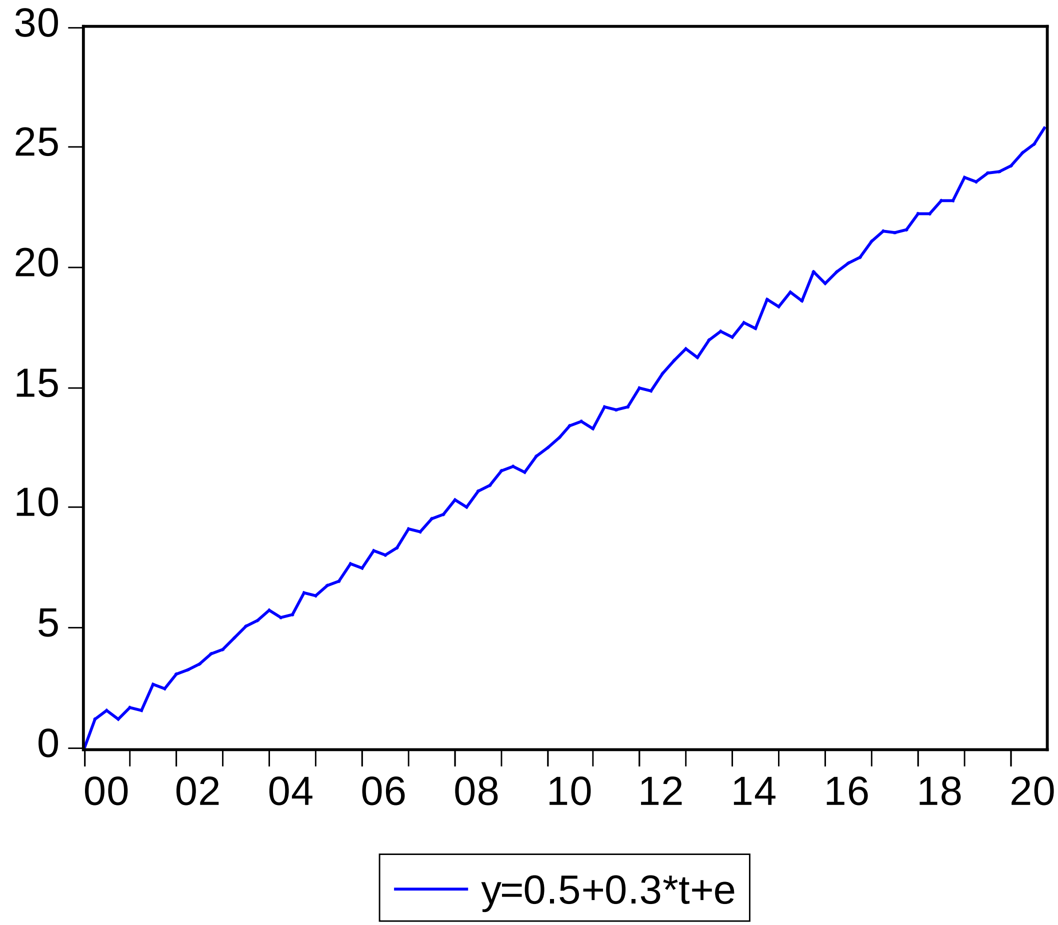
# Короткотермінова залежність - 1



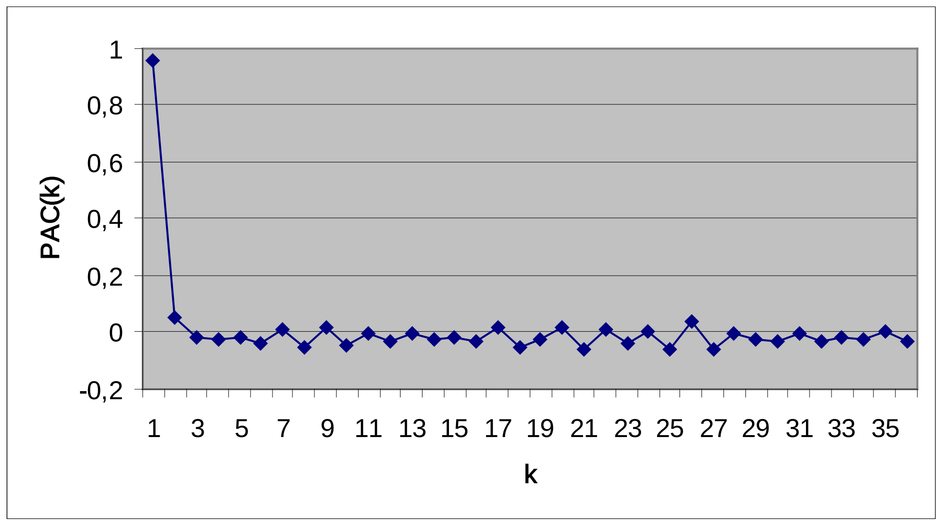
# Короткотермінова залежність - 3



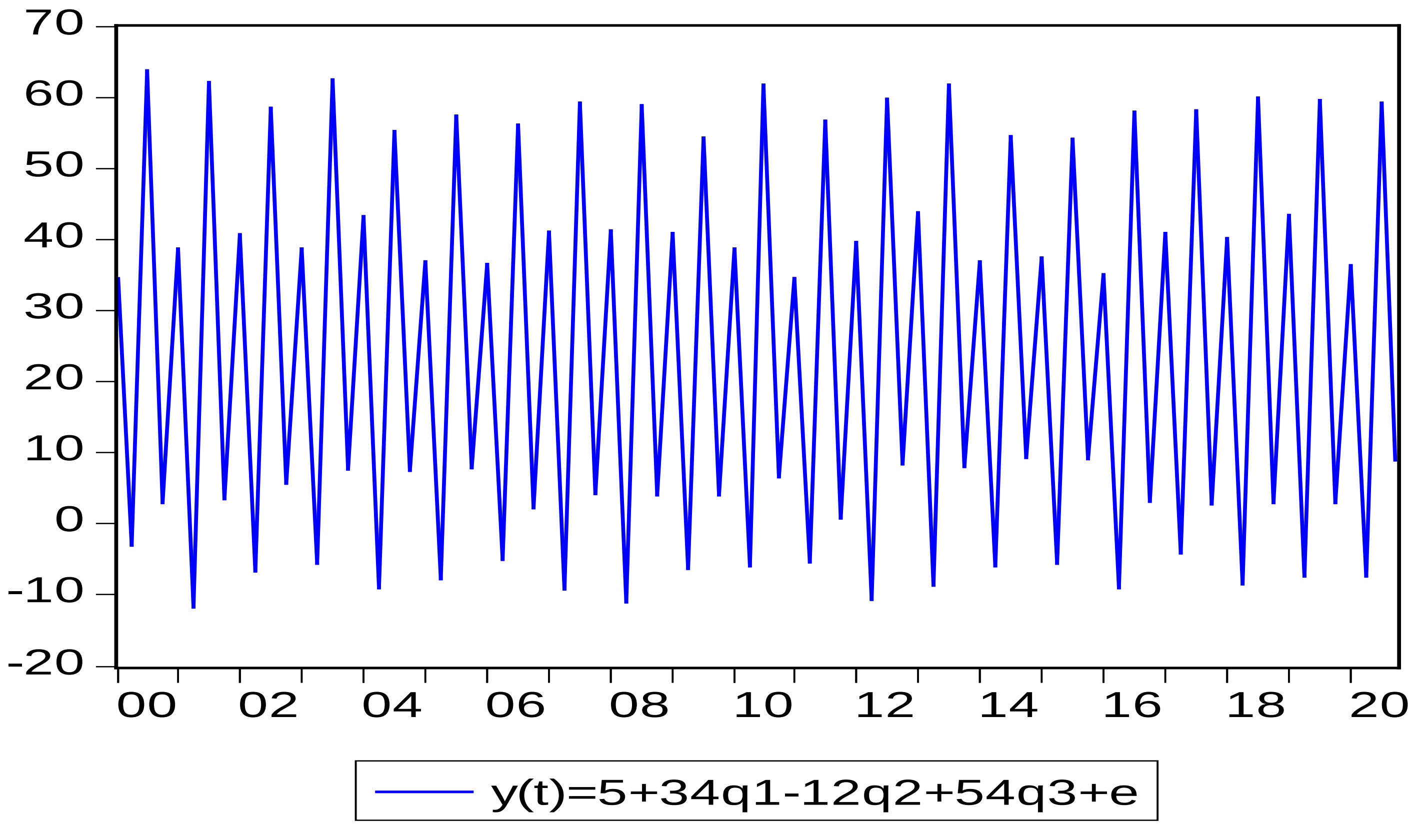
# Нестаціонарні процеси - 1



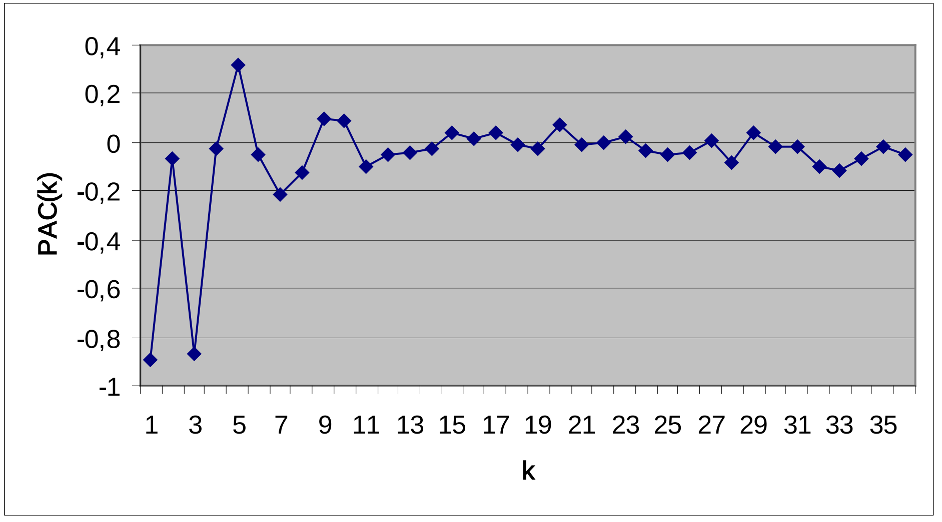
# Нестаціонарні процеси - 2



# Сезонні коливання - 1



# Сезонні коливання - 2



# Стійкість моделі

Важливим елементом є дослідження стабільності обраної моделі. Припустимо, що можна деяким чином побудувати модель, яка дійсно описує реальний економічний процес. Будемо називати модель стійкою, якщо протягом часу її параметри не змінюються.

Нехай $y_t$ характеризує наявну інформацію до часу $t$, $\alpha_t$ – параметри моделі, які визначаються у час $t$ за правилом

$$\alpha_t = F(y_t).$$

# Стійкість моделі

Стійкість моделі формально визначається наступним чином:

$\alpha_t = const, \quad \forall\, t \ge t_0$ , де

$t_0$ – деякий визначений період часу.

# Відносна стійкість моделі

Відносна стійкість моделі дозволяє параметрам моделі змінюватися, але лише визначеним чином:

$$\alpha_t = f\left(\alpha_{t-1}\right)$$

де $f$ – наперед задана функція чи правило.

# Нестійка модель

Якщо модель не є стійкою чи, принаймні, відносно стійкою, то вона вважається нестійкою. Це означає, що її параметри змінюються в залежності від часу їх оцінювання. Звичайно, наявність нестійкої моделі, не сприяє створенню точного прогнозу. Справді, параметри моделі, отримані у період часу $t$, змінюються наступного періоду.

# ОГЛЯД

# Мета аналізу часових рядів

Метою прикладного статистичного аналізу часових рядів є **побудова математичної моделі ряду**, за допомогою якої можна пояснити поведінку ряду і **здійснити прогноз** на майбутні періоди.

$$\hat{y}_{T+1} - ?$$

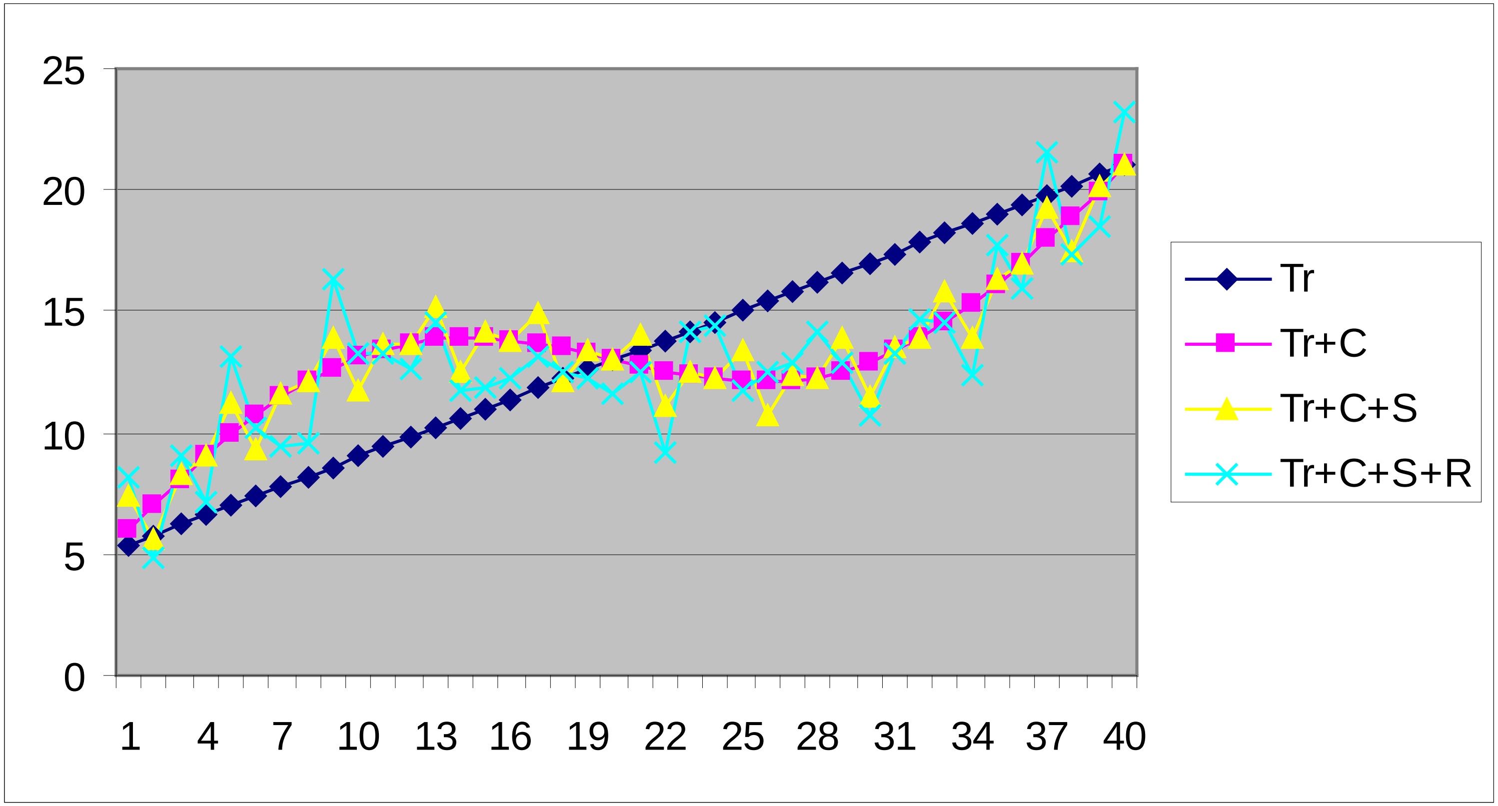
# Адитивна модель

Таким чином, будь-який часовий ряд можна розглядати як суму:

$$y_t = tr_t + s_t + c_t + r_t,\ t = \overline{1,T}.$$

Такий вигляд часового ряду отримав назву **адитивної моделі**.

# Приклад



# Абсолютні критерії точності прогнозів

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_t \left(y_t - \hat{y}_t\right)^2$$

середньоквадратична похибка прогнозу за n кроків.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_t \left(y_t - \hat{y}_t\right)^2}$$

корінь із середньоквадратичної похибки прогнозу за n кроків.

$$MAD = \frac{1}{n}\left|y_t - \hat{y}_t\right|$$

середня абсолютна похибка за n кроків.

# Відносні критерії точності прогнозів

$$RMSPE = 100\sqrt{\frac{1}{n}\sum_t\left(\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right)^2}$$

корінь із середньоквадратичної похибки у відсотках від фактичних значень за n кроків.

$$MAPE = \frac{100}{n}\sum_t\left|\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t}\right|$$

середня абсолютна похибка у відсотках за n кроків.

# ПИТАННЯ?

# ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!